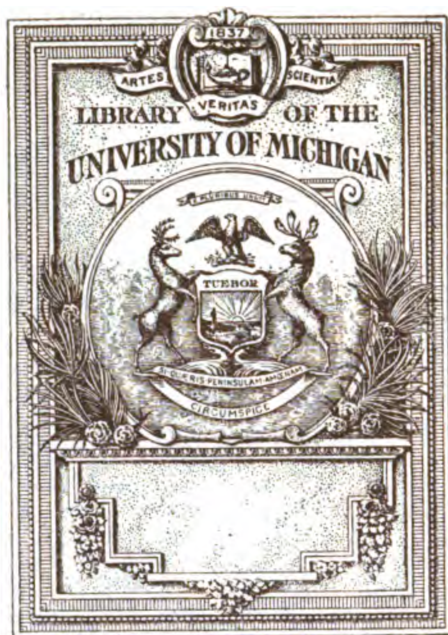

1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

G. Decher,

Handbuch der Mechanik.

Vierter Band.

Handbuch

der

rationellen Mechanik.

Von

G. Decher,
Professor der Mechanik an der k. polytechnischen Schule zu Augsburg.

Vierter Band.

Mechanik flüssiger Systeme.

Mit 2 Steintafeln.

Augsburg.
Verlag der Matth. Rieger'schen Buchhandlung.
1861.

Vorwort.

Die Behandlung, welche der **Mechanik flüssiger Systeme** im vorliegenden vierten Buche meines Handbuches zu Theil geworden ist, weicht von der gewöhnlichen im Allgemeinen einmal darin ab, daß sie sich ganz auf die **Mechanik der veränderlichen Systeme** stützt, indem die flüssigen Systeme nur als eine **besondere Art stetiger veränderlicher Systeme** betrachtet werden, dann aber auch darin, daß ich die Untersuchungen der **inneren Zustände** eines flüssigen Systems nach den **äußern Zuständen** desselben geschieden und den innern Zuständen **bei äußerer Bewegung** eine größere Berücksichtigung zugewendet habe. Die daraus folgende Eintheilung des vierten Buches zeigt ein Blick in die Inhalts-Anzeige.

Auch hinsichtlich der Behandlung des Gegenstandes im Einzelnen, insofern es sich um den Zweck und Inhalt der einzelnen Paragraphen handelt, gibt die Inhalts-Anzeige die beste Auskunft; ich erlaube mir daher hier nur einige Worte über die Art und Weise der Behandlung einzelner Disciplinen beizufügen, insofern diese weniger bestimmt aus der Inhalts-Anzeige entnommen werden kann.

In §. 12 habe ich die Beziehungen zwischen der **Spannung und Dichte eines Gasgemenges** einer eingehenden Untersuchung unterworfen, und zwar ohne und mit Berücksichtigung des Gewichtes der Gase und gestützt auf das allgemeine Gesetz der **Diffusion**.

Um einem Einwande zu begegnen, welchen S. Ohm in seinem

Compendium der Physik gegen die bisherige Ableitung der Formeln für die **Höhenmessung mittels des Barometers** erhoben und darin zu finden geglaubt hat, daß man die Schwere als parallel wirkend angenommen und den Druck eines Luft-Cylinders statt eines Kugelsectors berechnet habe, wurden in §. 19 zuerst die allgemeinen Beziehungen für den Druck und die Niveaufläche in einer schweren Flüssigkeit unter der Voraussetzung aufgestellt, daß die Richtung der Kraft, welche auf die Flüssigkeitstheilchen wirkt, immer durch den Mittelpunkt der Erde geht und eine beliebige Function der Entfernung von diesem Punkte ist, und dann wurde aus diesen allgemeinen Beziehungen die besondern für unsere atmosphärische Luft geltende abgeleitet und darauf die Formel zur Höhenmessung gegründet. Diese Untersuchung wurde dann aber in der zweiten Abtheilung des ersten Abschnittes in §. 27, u. ff. noch einmal aufgenommen und **mit Berücksichtigung der ellipsoidischen Gestalt und Umdrehung der Erde** möglichst allgemein durchgeführt.

Die allgemeinen Gleichungen für die **Bewegung einer Flüssigkeit** habe ich einer ganz neuen Behandlung unterzogen; zuerst werden diese Gleichungen in andere umgewandelt, in welchen die vollständigen Aenderungsgesetze der Geschwindigkeits-Componenten in Bezug auf die Zeit durch **die Projectionen des Aenderungsgesetzes der lebendigen Kraft** und durch **die Componenten des dynamischen Druckes** eines Flüssigkeitstheilchens ersetzt sind, und dann wird aus diesen die allgemeine Beziehung zwischen der Aenderung des Druckes, der Aenderung der lebendigen Kraft, dem dynamischen Druck und der äußern geometrischen Kraft **für eine bestimmte Uebergangsrichtung** abgeleitet, und zwar insbesondere für **den Uebergang in der Richtung der Bewegung oder in der Bahn des betreffenden Flüssigkeitstheilchens**, für den **in der Richtung des Krümmungshalbmessers** und den **senkrecht zur Krümmungsebene der Bahn**, endlich für eine **solche Uebergangsrichtung, für welche die Aenderung des Druckes Null ist**, der Druck also constant bleibt. Die erste und dritte dieser Beziehungen sind von dem dynamischen Druck unabhängig und erscheinen deßhalb in integrirbarer

Form; die erste gibt **die Beziehung zwischen der Aenderung des Druckes, der Aenderung der lebendigen Kraft und der Arbeit der äußern geometrischen Kraft**; sie ist die wichtigste für die Untersuchung der fließenden Bewegung und führt ohne die besondere, nicht zulässige Voraussetzung über die Natur der Bewegung, welche man mit dem Namen: **Parallelismus der Schichten** bezeichnet hat, auf dem einfachsten und natürlichsten Wege zu den **Beziehungen für die Ausflußgeschwindigkeit schwerer tropfenbildender und gasförmiger Flüssigkeiten.**

Der analytische Ausdruck für den sogenannten **hydraulischen Druck**, wie er gewöhnlich unter der ebengenannten Voraussetzung abgeleitet wird, ist nur für solche horizontale Querschnitte zulässig, in welchen **alle Flüssigkeitstheilchen parallel und geradlinig sich bewegen**, also nur in äußerst wenigen Fällen, und ist deßhalb auch **gänzlich unbrauchbar, um den Druck der ausfließenden Flüssigkeit auf die Gefäßwände zu berechnen.** Ich habe in §. 39 u. ff. ein Verfahren angegeben, durch welches die förderndeu und drehenden Componenten des auf das ganze Gefäß ausgeübten Druckes mit hinreichender Annäherung an die Wahrheit bestimmt werden können.

Derselbe Gang wie beim äußeren Gleichgewicht, wird auch für die Untersuchung **der fließenden Bewegung bei äußerer Bewegung** beibehalten und darnach einige für die Anwendung wichtige Ergebnisse abgeleitet.

Bei der Untersuchung **der oscillirenden Bewegung eines flüssigen Systems** wird zuerst die Nothwendigkeit der Beibehaltung der **verschiebenden Spannungen** erörtert, und die Beziehung zwischen den beiden Elasticitäts-Coefficienten und der Zusammendrückbarkeit einer homogenen Flüssigkeit aufgestellt. Aus jener Nothwendigkeit folgt auch die der Beibehaltung der **vollständigen**, aber auf kleine Verrückungen beschränkten **Bewegungsgleichungen eines veränderlichen Systems**, um die verschiedenen oscillirenden Bewegungen der Flüssigkeiten darstellen zu können; diese Gleichungen werden aber hier noch in andere auf **Kugel-Coordinaten** bezogene umgewandelt, da es sich hier hauptsächlich um solche Oscillationen handelt, welche von

einem Erregungspunkte ausgehen und sich in **Kugelwellen** fortpflanzen. Für oscillirende Bewegungen in kugelförmigen Wellen **mit normaler Oscillationsrichtung** gehen daraus befriedigende, **mit der Natur der Schallbewegung der atmosphärischen Luft** übereinstimmende Gleichungen hervor; es ist mir dagegen nicht gelungen, für die Bewegung in kugelförmigen Wellen mit **tangentialer Oscillationsrichtung** solche Gleichungen abzuleiten, welche mit den in **der Optik** zu Grunde gelegten Oscillationsgesetzen übereinstimmen und den allgemeinen Bewegungsgesetzen streng genügen.

Daß der im dritten Abschnitt behandelte Gegenstand, **das Gleichgewicht eines in eine Flüssigkeit eingetauchten festen Körpers,** aus dem ersten Abschnitt, wo er gewöhnlich eingeschaltet wird, ausgeschieden wurde, bedarf wohl im Hinblick auf die ganze Anordnung meines Handbuches keiner besondern Rechtfertigung; es lag übrigens auch in meinem ursprünglichen Plan, in diesem Abschnitt auch die **Bewegungsgesetze** eines eingetauchten Körpers aufzunehmen; allein die zu sehr beschränkenden Voraussetzungen, welche dieser Untersuchung zu Grunde gelegt werden und die fast gar keine anwendbare Resultate zulassen, ließen mich auf die vollständige Ausführung jenes Planes verzichten.

Augsburg im December 1860.

G. Decher.

Inhalt
des vierten Bandes.

Viertes Buch.
Mechanik flüssiger Systeme.

Vorläufige Erörterungen.

Erster Abschnitt.
Inneres Gleichgewicht eines flüssigen Systems.

I. Inneres Gleichgewicht bei äußerem Gleichgewicht.

II. Inneres Gleichgewicht bei äußerer Bewegung.

Zweiter Abschnitt.

Innere Bewegung eines flüssigen Systems.

I. Fließende Bewegung bei äußerem Gleichgewicht.

II. Fließende Bewegung bei äußerer Bewegung.

Dritter Abschnitt.

Gleichgewicht eines in eine Flüssigkeit eingetauchten festen Körpers.

Berichtigungen

zum vierten Bande.

Seite	Zeile	von	Fehler	Berichtigung
10	8	oben	(78)	(77)
10	5	unten	Spannung	Spannungen
48	6	"	(32)	(33)
62	12	oben	$\pi p r^2 \sin\nu$	$\pi p c r^2 \sin\nu$
108	1	"	ist zu lesen:	stehen demnach auf der durch die Richtung der äußern Bewegung gelegten Verticalebene senkrecht.
110	14	"	$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$	$f(x, y, z)$
121	20	"	nicht.	nicht (Fig. 13.).
188	11	unten	$\varphi(x, y, x_{,}, y_{,}, w_x, w_y, w_z)$	$\varphi(x, y, x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}, w_x, w_y, w_z)$
211	3	oben	$-6h'z$	$-6h'z_0$
212	5	unten	$-6h'z$	$-6h'z_0$
215	3	oben	$\frac{1}{3}\sqrt{3a\ldots}$	$\frac{1}{6}\sqrt{3a\ldots}$
224	4	unten	größer	nicht kleiner
248	3	"	$\varphi^2(l^2+h^2)$	$\varphi^2(l^2+k^2)$
"	1	"	$2-\frac{g\sin\psi+h\varphi^2\cos\psi}{c^2}$	$2\,\frac{g\sin\psi+k\varphi^2\cos\psi}{c^2}$
249	5, 6, 8, 9, 10	oben	h	k
250	14	"	O r	Q r
261	2	unten	$r\sin\vartheta\cos\omega$	$r\sin\vartheta\sin\omega$
263	4	oben	$T_r^{(\vartheta)}\cos\delta\sin\omega$	$T_r^{(\vartheta)}\cos\vartheta\sin\omega$
303	13	unten	$\frac{\varepsilon_1}{2q}$	$\frac{\varepsilon_1}{2q}$

Viertes Buch.

Mechanik flüssiger Systeme.

Vorläufige Erörterungen.

§. 1.

Ein flüssiges System ist ein für unsere Wahrnehmung und die mathematische Behandlung stetiges System materieller Punkte von unbeschränkter Veränderlichkeit und Beweglichkeit, so daß eine beliebig kleine Kraft, welche auf einen oder mehrere aneinanderliegende Punkte eines solchen Systems allein wirkt, hinreicht, diese zwischen den übrigen Punkten fortzubewegen und sie innerhalb des Systems in eine neue Lage zu versetzen, in welcher sie, von den äußern Kräften abgesehen, einen ähnlichen innern Zustand annehmen können, wie in ihrer frühern Lage, und in welcher sie kein Bestreben äußern, in die letztere zurückzukehren. Mit dieser Voraussetzung steht dann die weitere Eigenschaft in nothwendigem Zusammenhange, daß wenn zwischen den Theilchen eines flüssigen Systems noch eine gegenseitige anziehende Wirkung, eine Cohäsion zugelassen werden soll, diese nur sehr schwach sein kann.

Die in der Natur vorkommenden Flüssigkeiten nähern sich deßhalb jener ideellen Vorstellung von der unbeschränkten Beweglichkeit eines flüssigen Systems um so mehr, je weniger sie die Eigenschaft der Dick- oder Zähflüssigkeit und der Klebrigkeit besitzen, und je weiter ihre Temperatur von derjenigen entfernt ist, bei welcher sie unter sonst gleichen Verhältnissen in die feste Aggregatform zurückkehren, je mehr also ihre Cohäsion vermindert ist. Vor allen sind es daher die gasförmigen Flüssigkeiten, welche auf jene Eigenschaft der vollkommenen Beweglichkeit Anspruch machen können, da bei diesen die abstoßende Kraft der Wärme die weit überwiegende ist; es besitzen die genannte Eigenschaft aber auch viele tropfbarflüssige Stoffe, wie Wasser, Weingeist, Quecksilber, u. s. f., bei welchen noch eine

Cohäsion wahrgenommen wird, in hinreichend hohem Grade, um eine Vergleichung ihres mechanischen Verhaltens mit dem aus der Theorie abgeleiteten Verhalten unserer ideellen flüssigen Systeme zuzulassen und die Betrachtung solcher Systeme dem Vorwurf einer rein mathematischen zwecklosen Speculation zu entziehen.

Auf der andern Seite aber macht es gerade die Forderung, daß die Bewegungen eines flüssigen Systems soviel als möglich mit den durch die Erfahrung wahrgenommenen Bewegungen der Flüssigkeiten in Uebereinstimmung zu bringen sind, nothwendig, jener Eigenschaft der vollkommenen Beweglichkeit und Verschiebbarkeit der Flüssigkeitstheilchen selbst bei den gasförmigen Flüssigkeiten eine Beschränkung beizufügen, welche man bis jetzt in den über die Bewegung solcher Stoffe handelnden Werken zu machen unterlassen hat, und welche darin besteht, daß die Flüssigkeitstheilchen für sehr kleine Verschiebungen aus ihrer ursprünglichen Lage, wenn dieselbe z. B. nur ein Bruchtheil von dem in der physikalischen Vorstellung begründeten Abstande der einzelnen Punkte einer Flüssigkeit ist, keinen neuen Gleichgewichtszustand mit den umgebenden Theilchen eingehen, sondern das Bestreben haben, in ihre ursprüngliche Lage zurückzukehren, oder mit andern Worten, daß für eine so kleine Verschiebung die Resultirende aller an dem verschobenen Punkte angreifenden innern Kräfte nicht, wie bei einer meß- oder wahrnehmbaren Verschiebung, Null bleibt, sondern eine innere Spannung erzeugt, welche den verschobenen Punkt in seine ursprüngliche Lage zurückzuführen strebt, wie es bei den veränderlichen Systemen der festen Aggregatform der Fall ist. Die nähern Gründe für die Nothwendigkeit dieser Beschränkung können übrigens erst bei der Untersuchung der oscillirenden Bewegungen flüssiger Systeme näher erörtert werden.

§. 2.

Als veränderliche Systeme müssen die Flüssigkeiten sowohl hinsichtlich des äußern als des innern örtlichen Zustandes ganz und gar den allgemeinen Gesetzen unterworfen sein, welche in dem vorhergehenden Buche für stetige veränderliche Systeme entwickelt wurden, und es werden namentlich in Betreff des äußern Zustandes durch die vorhergehenden Voraussetzungen über die Eigenschaften flüssiger Systeme keinerlei vereinfachende Modificationen in den allgemeinen Gesetzen hervorgerufen, welche im ersten Abschnitt des vorhergehenden Buches erörtert sind. Für die Untersuchung des innern Zustandes dagegen gestatten jene Voraussetzungen in vielen Fällen, wesentliche Vereinfachungen in

den allgemeinen Gleichungen (70) bis (100) für den innern Gleichgewichts- und Bewegungszustand stetiger veränderlicher Systeme im zweiten Abschnitt desselben Buches vorzunehmen, da für alle jene Untersuchungen, bei welchen von den sehr kleinen Oscillationen der Flüssigkeitstheilchen um ihre Gleichgewichtslage Umgang genommen wird, also namentlich für die Untersuchungen des Gleichgewichtes und der fließenden Bewegung flüssiger Systeme die in den zuletzt genannten Gleichungen mit S_x, S_y, S_z bezeichneten verschiebenden Spannungen als Null angenommen werden können, und daher in denselben nur noch die normalen Spannungen T_x, T_y, T_z enthalten bleiben. Man wird ferner daraus und aus der beliebigen Lage des Coordinatensystems schließen, daß nun alle Spannungen um einen Punkt herum nur normale und wegen der verschwindend kleinen Cohäsion der Flüssigkeitstheilchen nur drückende Kräfte sein können, und dann mit den in den §§. 39 bis 41 des vorhergehenden Buches abgeleiteten Beziehungen zwischen den nach verschiedenen Richtungen statthabenden Spannungen in einem beliebigen Punkte eines veränderlichen Systems den weiteren Schluß ziehen, daß unter der obigen Voraussetzung bei einem flüssigen System sowohl das Ellipsoid der Spannungen als auch die Richtungsfläche der Spannungen Kugelflächen werden müssen, weil nur für diese alle Fahrstrahlen auch Normale sein können, und daß demnach die Spannung oder hier insbesondere der geometrische Druck in irgend einem Punkte der Flüssigkeit nach allen Richtungen hin gleich groß sein muß, wie man es übrigens schon am Ende des §. 39 unmittelbar ausgesprochen findet.

Diese besondere mechanische Eigenschaft, welche die flüssigen Systeme wesentlich von den veränderlichen Systemen der festen Aggregatform unterscheidet, dürfte für sich schon die besondere Behandlung derselben in einem eigenen Buche als Mechanik flüssiger Systeme rechtfertigen. Zu dieser Eigenschaft kommt aber noch als weiterer Grund für die besondere Betrachtung der Flüssigkeiten der wesentlich verschiedene Zweck, welchen man, durch die Erfahrung geleitet, bei der Mechanik der Flüssigkeiten zu erreichen hat. Denn hier handelt es sich bei der Untersuchung des Gleichgewichtszustandes nicht um die Aenderung in der äußern Gestalt des Systems, die durch Kräfte hervorgerufen wird, welche auf die äußern Begrenzungsflächen wirken und gegen welche die auf die einzelnen Punkte des Systems ausgeübten äußern Wirkungen vernachlässigt werden, sondern um den Druck, welcher in irgend einem Punkte der Flüssigkeit gerade in Folge der auf ihre Theilchen ausgeübten äußern Wirkungen allein oder mit Berück-

sichtigung einer auf die Begrenzungsfläche wirkenden Kraft statt hat, oder welchen die Flüssigkeit auf die sie begrenzenden festen Wände oder in dieselbe eingetauchte feste Körper ausübt. Noch mehr ist die Untersuchung der fortschreitenden, fließenden, also nicht periodischen Bewegung der Flüssigkeiten von der Untersuchung der immer nur periodischen Bewegung der veränderlichen Systeme von fester Aggregatform verschieden; die sehr kleinen periodischen oder oscillirenden Bewegungen der Flüssigkeiten dagegen unterscheiden sich in gar nichts von denen der zuletzt genannten veränderlichen Systeme; für diese Bewegungen bleiben deßhalb auch die vollständigen Gleichungen (98) oder (138), welche sich nur auf sehr kleine Veränderungen in der ursprünglichen Lage der Punkte eines veränderlichen Systems beziehen, nebst allen daraus in den §§. 91 bis 96 des vorhergehenden Buches abgeleiteten Gesetzen unverändert bestehen.

Diesen Erörterungen zufolge werden wir uns in der Mechanik flüssiger Systeme nur mit der Untersuchung der innern Zustände befassen, und zwar in gesonderten Abschnitten den innern Gleichgewichtszustand und den innern Bewegungszustand untersuchen; in beiden Fällen werden wir aber nach dem äußern Zustande unterscheiden, ob das System sich im Zustande des äußern Gleichgewichtes oder der äußern Bewegung befindet; nur bei dem oscillatorischen Bewegungszustand werden wir immer äußeres Gleichgewicht voraussetzen. Außerdem wird noch ein dritter Abschnitt der Betrachtung der Zustände eines in eine Flüssigkeit eingetauchten festen Körpers gewidmet sein.

§. 3.

Die im Vorhergehenden erörterten bezeichnenden Eigenschaften flüssiger Systeme haben beide in der Natur vorkommende Arten von Flüssigkeiten, nämlich die tropfbar-flüssigen und die gasförmigen Stoffe mit einander gemein; die aus jenen Eigenschaften zu folgernden Gesetze müssen sich daher auch auf beide genannte Arten von Flüssigkeiten anwenden lassen. Diese Gesetze werden aber in ihrer Anwendung auf jede dieser beiden Flüssigkeitsformen je nach den besondern Eigenschaften derselben Modificationen erleiden; wir müssen daher, um diese erörtern zu können, auch zwei ideelle Arten flüssiger Systeme unterscheiden und dieselben mit solchen besondern Eigenschaften ausstatten, daß sie in ihrem mechanischen Verhalten jenen in der Natur vorkommenden beiden Arten von Flüssigkeiten möglichst nahe kommen.

Der in dieser Hinsicht wichtigste Unterschied zwischen diesen beiden Flüssigkeitsformen liegt in der Beziehung zwischen der Dichte der Flüssigkeit und dem auf sie ausgeübten Drucke, wenn beide constant

sind, oder zwischen der geometrischen Dichte und dem geometrischen Drucke in einem beliebigen Punkte, wenn diese Größen veränderlich sind. — Bei den tropfbar=flüssigen Stoffen ändert sich die Dichte nur sehr wenig mit dem auf sie ausgeübten Drucke; sie wurden deßhalb bis in die neuere Zeit als gänzlich unzusammendrückbar betrachtet und werden jetzt noch bisweilen im Gegensatze zu den gasförmigen Flüssigkeiten darnach benannt. In der Mechanik wird deßhalb auch ihre Dichte durchaus als unabhängig vom Drucke angenommen; sie werden demnach als flüssige Systeme betrachtet, welche bei derselben Temperatur unter jedem Drucke denselben Raum einnehmen. Will man übrigens für besondere Fälle, in welchen der Druck sehr groß ist, die Annäherung weiter treiben, so kann man denselben für den Druck Null eine bestimmte Dichte beilegen, welche von der unter dem atmosphärischen Drucke stattfindenden sehr wenig verschieden sein wird, und die Aenderung dieser Dichte dem Drucke proportional annehmen, wobei man dann den Aenderungs=Coefficient als sehr klein voraussetzen darf. Es gibt zwar auf der Erde keinen Fall, wo eine solche Flüssigkeit mit freier Oberfläche keinem Druck unterworfen wäre, weil wir den atmosphärischen Druck nur künstlich in geschlossenen Räumen beseitigen können, und diese sich dann mit Dämpfen aus der betreffenden Flüssigkeit und von einer ihrer Temperatur entsprechenden Spannung anfüllen; wir müssen vielmehr nach diesen Erfahrungen schließen, daß unsere tropfbar=flüssigen Stoffe ohne Druck gar nicht existiren können, indem sie bei hinreichendem Wärmezufluß sich ganz in Dampf verwandeln und ohne diesen ihre Temperatur durch theilweise Verdampfung so weit erniedrigen müßten, daß der nicht verdampfte Theil in die feste Aggregatform übergehen würde. Für unsere Betrachtungen in der Mechanik können wir aber, ohne Nachtheil für die Vergleichbarkeit ihrer Ergebnisse mit der Erfahrung, die tropfbar=flüssigen Stoffe, welche einmal als existirend zu nehmen sind und bei niedrigen Temperaturen wirklich unter einem sehr kleinen Drucke im tropfbar=flüssigen Zustande bestehen, auch ohne allen Druck von Außen in diesem Zustande bestehend annehmen und sie dann für die Betrachtung besonderer Fälle einem solchen Drucke unterworfen voraussetzen.

Bei den gasförmigen Flüssigkeiten dagegen ist die Zusammendrückbarkeit sehr groß, und die Dichte einer solchen steht bei gleicher Temperatur in geradem Verhältnisse zu dem auf sie ausgeübten Drucke; das Verhalten der Gase weicht wenigstens von diesem Verhältniß, welches gewöhnlich das Mariotte'sche Gesetz genannt wird, innerhalb der bis jetzt durch die Erfahrung erreichten

Grenzen und unter der Voraussetzung, daß sich Druck und Temperatur nicht zu sehr denjenigen Werthen nähern, bei welchen der entsprechende gasförmige Stoff in den tropfbar-flüssigen Zustand zurückgeht, so wenig ab, daß dasselbe bei unsern jetzigen Kenntnissen über die innere Constitution der gasförmigen Flüssigkeiten wohl als Eigenschaft eines ideellen gasförmig-flüssigen Systems zugelassen werden kann, und die in der Natur vorkommenden gasförmigen Stoffe scheinen sich diesem ideellen Zustande um so mehr zu nähern, je weiter Druck und Temperatur von den eben erwähnten Werthen entfernt sind. Es scheint aber auch hier eine Grenze für die Anwendbarkeit des Mariotte'schen Gesetzes gesetzt zu sein; denn es würde daraus folgen, daß sich eine gasförmige Flüssigkeit ohne äußern Druck oder Widerstand in einen unbegrenzten Raum ausbreiten müßte und zwar ohne Aenderung der Temperatur; dieß setzt aber einen unbeschränkten Zufluß von Wärme voraus, und es muß deßhalb ohne diesen Zufluß in Folge der Temperatur-Verminderung eine Grenze in der Verminderung der Dichte eintreten, welche sich aber nach unsern jetzigen Kenntnissen nicht bestimmen läßt.

Ueberhaupt ist der Einfluß der Wärme auf das mechanische Verhalten der gasförmigen Flüssigkeiten ein sehr bedeutender, da mit der Aenderung der Dichte meistens auch eine Aenderung der Temperatur und eine Aufnahme oder Abgabe von Wärme verbunden ist, und sich dann die Spannung nach einem andern als dem Mariotte'schen Gesetze ändert. Man verbindet zwar mit diesem Gesetze noch das Gay-Lussac'sche, welches ausspricht, daß die Volumenänderung derselben Gewichtsmenge eines Gases bei constantem Druck der Aenderung seiner Temperatur proportional ist, um eine Beziehung zwischen der Temperatur, der Spannung und der Dichte einer gasförmigen Flüssigkeit zu erhalten; allein dieses combinirte Gesetz, welches sich durch die Gleichungen:

$$q = q_0 \frac{P}{P_0} \frac{1 + a\tau_0}{1 + a\tau} \qquad \text{oder} \qquad PV = P_0 V_0 \frac{\alpha + \tau}{\alpha + \tau_0}$$

ausdrücken läßt, worin q_0 die Dichte und V_0 das Volumen einer bestimmten Gewichtsmenge eines Gases bei der Temperatur τ_0 und dem Drucke P_0, q und V die entsprechenden Größen derselben Gasmenge bei der beliebigen Temperatur τ und dem beliebigen Druck P bezeichnen und $a = \frac{1}{\alpha}$ die Volumenänderung desselben Gases für die Einheit der Temperaturänderung (1 Temperatur-Grad) bei constantem Druck

vorstellt *), enthält drei Veränderliche, also darunter zwei unabhängige, und kann daher nicht einmal dazu dienen, die mit der Aenderung der Dichte eintretende Aenderung der Temperatur und Spannung für den Fall zu bestimmen, daß die in dem Gase enthaltene Wärmemenge unverändert bleiben soll; es bedarf dazu noch eines weiteren Gesetzes, welches eine Beziehung zwischen zwei der drei vorhergehenden Veränderlichen und der aufgenommenen oder abgegebenen Wärmemenge feststellt, mit welchem aber die Lehre von der Wärme bis jetzt noch nicht zu Stande gekommen ist.

Wir werden deßhalb hier alle Fragen, bei welchen die Wärmemenge einer gasförmigen Flüssigkeit in Rechnung kommt, umgehen und bei unserm ideellen gasförmig-flüssigen System nur die durch das Mariotte'sche Gesetz ausgesprochene Eigenschaft zulassen.

*) Auch dieses Gesetz ist nur näherungsweise richtig, da sich nach Regnault's Versuchen der Coefficient a mit dem Drucke ändert, also selbst eine Function von P ist.

Erster Abschnitt.

Inneres Gleichgewicht eines flüssigen Systems.

I. Inneres Gleichgewicht bei äußerem Gleichgewicht.

§. 4.

Nach den vorausgegangenen Erörterungen können wir für die Untersuchung des Gleichgewichtzustandes eines flüssigen Systems in den allgemeinen Gleichungen (75[b]) oder (78) des vorhergehenden Buches, welche die Bedingungen für das innere Gleichgewicht eines beliebigen stetigen veränderlichen Systems ausdrücken, je nachdem dasselbe sich in dem Zustande des äußeren Gleichgewichtes oder einer äußern Bewegung befindet, die verschiebenden Spannungen S_z, S_y, S_x Null setzen, wodurch die erstern, auf die wir uns zunächst beschränken wollen, auf die einfachen Bedingungen:

$$1.)\quad \frac{\delta T_x}{\delta x} + q X = 0\,, \quad \frac{\delta T_y}{\delta y} + q Y = 0\,, \quad \frac{\delta T_z}{\delta z} + q Z = 0$$

zurückkommen. Es ist ferner schon darauf hingedeutet worden, daß unter dieser Voraussetzung und mit der Beachtung, daß die Kräfte T_x, T_y und T_z nur Spannungen von gleichem Sinne, und zwar wegen der verschwindend kleinen Cohäsion der Flüssigkeiten nur Druckkräfte sein können, sowohl das Ellipsoid der Spannungen als die Richtungsfläche der Spannungen Kugelflächen werden, daß also einerseits die Spannung nach allen Richtungen hin gleich und anderseits normal zu den entsprechenden Schnittflächen sind oder mit der Uebergangsrichtung selbst zusammenfallen. Es dürfte indessen nicht überflüssig sein, diesen Satz, welcher gewöhnlich ohne weitere Motivirung und ohne Beziehung zu den übrigen stetigen veränderlichen Syste-

nen als mechanische Grundeigenschaft der flüssigen Systeme hingestellt wird, direct aus den allgemeinen Beziehungen (79) §. 39 im vorhergehenden Buche für die Spannungen in einem beliebigen Punkte eines veränderlichen Systems abzuleiten.

Bezeichnen wir dazu, wie in §. 40 des dritten Buches, die Spannungen $T^{(x)}$, $T^{(y)}$, $T^{(z)}$ für drei beliebige rechtwinklige Coordinatenebenen mit A, B, C, so haben wir, weil $S_z = A_y = B_x = 0$, $S_y = A_z = C_x = 0$, $S_x = B_z = C_y = 0$ ist, einmal $T_x = A_x = A$, $T_y = B_y = B$, $T_z = C_z = C$ und dann für die Componenten $T \cos \widehat{Tx}$, $T \cos \widehat{Ty}$, $T \cos \widehat{Tz}$ der Spannung T nach einer Richtung, welche durch die Winkel λ, μ, ν mit den Coordinaten-Achsen der x, y, z bestimmt wird, die Werthe:

$$T \cos \widehat{Tx} = A \cos \lambda\,,\quad T \cos \widehat{Ty} = B \cos \mu\,,\quad T \cos \widehat{Tz} = C \cos \nu\,,$$

also auch für T selbst die Gleichung:

$$T^2 = A^2 \cos^2 \lambda + B^2 \cos^2 \mu + C^2 \cos^2 \nu\,. \qquad \text{(a.}$$

Nehmen wir dann ein anderes Coordinatensystem der ξ, η, ζ an, so ist für dieses auch $S_\xi = S_\eta = S_\zeta = 0$, und wir erhalten die ähnlichen Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} T \cos \widehat{T\xi} = A_{,} \cos \lambda_{,}\,,\quad T \cos \widehat{T\eta} = B_{,} \cos \mu_{,}\,,\quad T \cos \widehat{T\zeta} = C_{,} \cos \nu_{,} \\ T^2 = A_{,}^2 \cos^2 \lambda_{,} + B_{,}^2 \cos^2 \mu_{,} + C_{,}^2 \cos^2 \nu_{,} \end{array}\right\}, \qquad \text{(b.}$$

worin $A_{,}$, $B_{,}$ und $C_{,}$ die Spannungen längs der Coordinaten-Achsen der ξ, η, ζ und $\lambda_{,}$, $\mu_{,}$, $\nu_{,}$ die Winkel derselben Uebergangsrichtung wie vorher mit diesen Achsen bedeuten. Setzt man dann wieder

$$\cos \widehat{\xi x} = a\,,\quad \cos \widehat{\xi y} = b\,,\quad \cos \widehat{\xi z} = c\,,\quad \cos \widehat{\eta x} = a'\,,\ \text{u. s. f.},$$

so hat man auch

$$\cos \lambda = a \cos \lambda_{,} + a' \cos \mu_{,} + a'' \cos \nu_{,}\,,$$
$$\cos \mu = b \cos \lambda_{,} + b' \cos \mu_{,} + b'' \cos \nu_{,}\,,\ \text{u. s. f.},$$

folglich nach (a)

$$\begin{aligned} T^2 = {} & A^2 (a \cos \lambda_{,} + a' \cos \mu_{,} + a'' \cos \nu_{,})^2 \\ & + B^2 (b \cos \lambda_{,} + b' \cos \mu_{,} + b'' \cos \nu_{,})^2 \\ & + C^2 (c \cos \lambda_{,} + c' \cos \mu_{,} + c'' \cos \nu_{,})^2\,. \end{aligned}$$

Zufolge der Gleichung (a) hat man aber auch für die Uebergänge längs der neuen Achsen der ξ, η und ζ

$$A_{,}^2 = a^2 A^2 + b^2 B^2 + c^2 C^2 , \quad B_{,}^2 = a'^2 A^2 + b'^2 B^2 + c'^2 C^2 ,$$
$$C_{,}^2 = a''^2 A^2 + b''^2 B^2 + c''^2 C^2 ,$$

und damit nimmt der vorstehende Werth von T^2 die Form an:

$$\begin{aligned} T^2 = {} & A_{,}^2 \cos^2 \lambda_{,} + B_{,}^2 \cos^2 \mu_{,} + C_{,}^2 \cos^2 \nu_{,} \\ & + 2 \cos \lambda_{,} \cos \mu_{,} (aa' A^2 + bb' B^2 + cc' C^2) \\ & + 2 \cos \lambda_{,} \cos \nu_{,} (aa'' A^2 + bb'' B^2 + cc'' C^2) \\ & + 2 \cos \mu_{,} \cos \nu_{,} (a'a'' A^2 + b'b'' B^2 + c'c'' C^2) \, . \end{aligned}$$

Wird demnach die letzte Gleichung (b) davon abgezogen, so bleiben die Bedingungen:

$$\text{c.)} \left\{ \begin{aligned} & aa' A^2 + bb' B^2 + cc' C^2 = 0 , \quad aa'' A^2 + bb'' B^2 + cc'' C^2 = 0 , \\ & a'a'' A^2 + b'b'' B^2 + c'c'' C^2 = 0 , \end{aligned} \right.$$

welche mit Berücksichtigung der Bedingungen:

$$\text{d.)} \left\{ \begin{aligned} & aa' + bb' + cc' = 0 , \quad aa'' + bb'' + cc'' = 0 , \\ & a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0 , \end{aligned} \right.$$

die zwischen der Cosinus a, b, c, a', rc. statthaben müssen, und mit der Beachtung, daß A, B und C gleiche Zeichen haben müssen, nur durch die Gleichheiten:

$$A = B = C$$

befriedigt werden können. Denn die beiden ersten der Bedingungen (c) z. B. geben durch Elimination von A^2

$$b (a'' b' - a' b'') B^2 + c (a'' c' - a' c'') C^2 = 0 ;$$

die beiden ersten der Bedingungen (d) geben ebenso durch Elimination von a die Gleichung:

$$b (a'' b' - a' b'') + c (a'' c' - a' c'') = 0 ,$$

welche mit C^2 multiplizirt und von der vorhergehenden abgezogen, auf die Bedingung:

$$B^2 - C^2 = 0 \quad \text{oder} \quad B = C$$

führt; ebenso ergibt sich auch $A = C$, und daraus folgt

$$T^2 = A^2 (\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu) , \quad T = A .$$

Endlich hat man auch

$$T \cos\vartheta = A \cos^2\lambda + B \cos^2\mu + C \cos^2\nu = A = T_z$$

und in diesen Gleichungen ist der obige Satz, daß der Druck in irgend einem Punkte eines flüssigen Systems nach allen Richtungen hin gleich und normal zu den entsprechenden Schnittflächen ist, ausgesprochen.

§. 5.

Ersetzen wir demnach und weil die Spannung T hier immer einen geometrischen Druck bedeutet, in den Gleichungen (1) die den Coordinatenachsen entsprechenden Spannungen $T_x = T_y = T_z = A$ durch — P, so nehmen dieselben unter Vertauschung der Zeichen δ und d die Form an:

$$\frac{dP}{dx} = qX\ ,\quad \frac{dP}{dy} = qY\ ,\quad \frac{dP}{dz} = qZ \qquad (2.$$

und bilden so die Grundbeziehungen für das innere Gleichgewicht eines flüssigen Systems bei äußerem Gleichgewichtszustand.

Für diesen Zustand kann P nur eine Function der drei unabhängigen veränderlichen Coordinaten x, y, z eines Punktes in der betreffenden Flüssigkeit sein; die Gleichungen (2) sprechen demnach aus, daß nur unter der Bedingung inneres Gleichgewicht bestehen kann, wenn die Componenten qX, qY, qZ der in dem Punkte x y z thätigen, auf die Aenderung des Volumens oder auf die Volumeneinheit sich beziehenden geometrischen Kraft qR die partiellen Aenderungsgesetze in Bezug auf x, y und z einer und derselben Function $F(x, y, z)$ dieser Veränderlichen sind, wenn man also hat

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2 P}{dx\, dy} = \dfrac{d.\, qX}{dy} = \dfrac{d^2 P}{dy\, dx} = \dfrac{d.\, qY}{dx} \\[2ex] \dfrac{d.\, qX}{dz} = \dfrac{d.\, qZ}{dx}\ ,\quad \dfrac{d.\, qY}{dz} = \dfrac{d.\, qZ}{dy} \end{array}\right\} \qquad (3.$$

Wenn diese Bedingungen durch die gegebenen Componenten qX, qY und qZ befriedigt sind, so können die Gleichungen (2) zu der vollständigen Differentialgleichung :

$$\text{a.)}\left\{\begin{aligned}\frac{d.P}{ds} &= \frac{dP}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{dP}{dy}\frac{dy}{ds} + \frac{dP}{dz}\frac{dz}{ds} \\ &= q\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right)\end{aligned}\right.$$

vereinigt werden, in welcher die Funktionen $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ die Cosinus der Winkel mit den drei Coordinatenachsen für eine beliebige Richtung, nach der man von dem Punkte $x\,y\,z$ zu einem anderen übergehen will, vorstellen, deren rechte Seite aber unter den vorhergehenden Bedingungen immer unabhängig von s integrirbar ist, weil sie darnach immer auf die Form:

$$\frac{d.\,F(x,\,y,\,z)}{ds}$$

gebracht werden kann. Man zieht daraus den Druck P zunächst in der Form:

$$4.)\quad P = P_0 + \int_{s_0}^{s} ds\,.\,q\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right),$$

worin die Grenzen s und s_0 sich auf die beiden Punkte des flüssigen Systems, in welchen der Druck P und P_0 ist, beziehen und daher die diesen Punkten entsprechenden Werthe von x, y, z und x_0, y_0, z_0 ersetzen.

Wir können nun die obige Bedingung für die Möglichkeit des innern Gleichgewichtes noch enger fassen. Die Componenten X, Y, Z der auf die Aenderung der Masse oder die Masseneinheit sich beziehenden geometrischen Kraft oder Beschleunigung R sind von der Dichte q unabhängig; die Bedingungen (3) müssen daher ebensowohl für ein constantes, wie für ein veränderliches q bestehen; man muß daher auch haben

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx},\quad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx},\quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy},$$

oder

$$5.)\quad X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = \frac{d.\,f(x,\,y,\,z)}{ds},$$

und wenn diese Bedingung erfüllt ist, so kommen die Bedingungen (3) für ein veränderliches q auf die folgenden:

$$X \frac{dq}{dy} = Y \frac{dq}{dx} , \quad X \frac{dq}{dz} = Z \frac{dq}{dx} , \quad Y \frac{dq}{dz} = Z \frac{dq}{dy}$$

oder

$$\frac{df}{dx} \frac{dq}{dy} = \frac{df}{dy} \frac{dq}{dx} , \text{ u. s. f.}$$

zurück, welche nur befriedigt werden können, wenn man hat

$$\frac{dq}{dy} = \varphi'' (f) \frac{df}{dy} = \frac{d . \varphi' (f)}{dy} ,$$

$$\frac{dq}{dx} = \varphi'' (f) \frac{df}{dx} = \frac{d . \varphi' (f)}{dx} ,$$

u. s. f.

oder einfach

$$q = \varphi' (f) = \varphi' [f (x, y, z)] . \qquad (6.$$

Es ist demnach nur dann Gleichgewicht in einem flüssigen System möglich, wenn die geometrischen Componenten X, Y, Z der Beschleunigung R für sich allein die partiellen Aenderungsgesetze in Bezug auf x, y und z einer Function $f(x, y, z)$ dieser drei Veränderlichen sind, oder wenn die Function:

$$X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} = \frac{d . f (x, y, z)}{ds}$$

das vollständige Aenderungsgesetz dieser Function $f(x, y, z)$ ist, und wenn die geometrische Dichte q selbst wieder eine Function von dieser Function $f(x, y, z)$ ist. Man erhält darnach, wenn $f(x, y, z) = U$ gesetzt wird, für den Druck P die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP}{ds} &= \varphi' (U) \frac{dU}{ds} , \\ P &= P_0 + \int_{s_0}^{s} ds . \varphi' (U) \frac{dU}{ds} \\ &= P_0 + \varphi (U) - \varphi (U_0) . \end{aligned}\right\} \qquad (7.$$

Im Allgemeinen ist die Dichte q eine Function des Druckes P und der Temperatur τ, also $q = \psi (P, \tau)$; da nun für das Gleichgewicht eines flüssigen Systems $q = \varphi' (U)$, $P = \varphi (U)$ sein muß, so

muß auch $\tau = \psi$ (U) sein; d. h. es kann in einem solchen System nur dann Gleichgewicht bestehen, wenn die von Punkt zu Punkt veränderliche Temperatur auch eine Function der Function U, also mit dieser Function constant oder veränderlich ist.

Wenn man aber die Function U $= f$ (x, y, z) constant nimmt, d. h. wenn man in der Flüssigkeit von einem Punkte x_0 y_0 z_0 nur in solchen Richtungen fortgeht, daß f (x, y, z) immer denselben Werth f (x_0, y_0, z_0) behält, oder

$$\frac{dU}{ds} = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}$$

immer Null bleibt, so kann sie leicht geometrisch erklärt, und dadurch die Bedingung für das Gleichgewicht eines flüssigen Systems anschaulicher gemacht werden; denn die Gleichung:

$$U = f(x, y, z) = U_0 = f(x_0, y_0, z_0)$$

stellt offenbar die Gleichung einer Fläche vor, welche die mechanische Eigenschaft besitzt, daß in allen Punkten derselben

$$X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = 0,$$

also die tangentiale Componente der geometrischen Kraft R Null ist, und daß folglich die Richtung dieser Kraft in jedem Punkte normal zu derselben ist. Die Gestalt dieser Fläche, welche man Niveaufläche nennt, hängt demnach einzig und allein von der Richtung der Kraft R ab, also weder von deren Größe, noch von der Dichte der Flüssigkeit, und die Bedingung für das Gleichgewicht einer solchen läßt sich nun einfach dahin aussprechen:

Ein flüssiges System kann nur dann im Gleichgewicht sein, wenn Temperatur und Dichte in der ganzen Ausdehnung einer Niveaufläche constant sind.

Unter dieser Bedingung besteht das Gleichgewicht an und für sich unabhängig davon, ob die Dichte mit der Funktion U wächst oder abnimmt oder ob sie constant bleibt; für die Stabilität dieses Gleichgewichtes bei eintretenden kleinen Störungen desselben ist das letztere aber nicht gleichgültig, und man wird leicht nach den drei ausgesprochenen Beziehungen der Dichte zur Function U die drei verschiedenen Arten des Gleichgewichtes unterscheiden.

Wenn die Dichte der Flüssigkeit durchaus constant, also von U und von dem Druck P unabhängig ist, oder allgemeiner, wenn die Dichte ohne die Kraft R constant wäre und nur durch den mit R oder U wachsenden Druck veränderlich wird, so kann irgend ein Flüssigkeitstheilchen oder selbst eine größere Menge derselben mit einem anderen Theilchen oder einer anderen ebenso großen Menge (Gewichtsmenge) vertauscht werden, ohne daß das Gleichgewicht gestört wird, oder es tritt nach einer eingetretenen Störung des Gleichgewichtes, wenn die störende Wirkung erloschen ist, ein neuer Gleichgewichtszustand ein, bei welchem die einzelnen Flüssigkeitstheilchen sich in ganz andern Orten und insbesondere in andern Niveauflächen befinden, als vor der Störung; wir haben also hier bei immer constanter oder nur mit dem Druck veränderlicher Dichte den Zustand des indifferenten Gleichgewichtes.

Wenn dagegen die Dichte q unabhängig von dem Druck veränderlich ist, so kann man, ohne das Gleichgewicht zu stören, nur solche Flüssigkeitstheilchen vertauschen, welche derselben Niveaufläche angehören, oder bei gleicher Ausdehnung ganze Niveauflächen, und man wird sich bald überzeugen, daß wenn die Dichte von einer Niveaufläche zur folgenden, im Sinne der Kraft R fortschreitend, mehr wächst, als die ursprünglich constante Dichte durch den aus R entstehenden Druck wachsen würde, das Gleichgewicht stabil sein muß, weil sich nach eingetretener kleiner Störung desselben die Niveauflächen nur wieder in derselben Weise ordnen können, wie vor derselben, daß dagegen im entgegengesetzten Falle, wenn die Dichte im Sinne von R weniger wächst, als eine ursprünglich constante Dichte durch den Druck vermehrt würde, das Gleichgewicht nur ein labiles sein kann, weil bei einer Störung desselben die dichteren Schichten oder Niveauflächen die weniger dichten durchbrechen müssen, um sich so weit als möglich im Sinne der Kraft R fortzubewegen und so zu ordnen, daß das Gleichgewicht ein stabiles wird. Da nämlich im Gleichgewichtszustand die Dichte in der ganzen Ausdehnung einer Niveaufläche constant ist, so muß eine Störung des Gleichgewichtes auch mit einer Störung oder Aenderung der Dichte längs der verschiedenen Niveauflächen verbunden sein, wenn dieselbe nicht durchaus constant oder nur mit dem Druck veränderlich ist; es wird daher in einer solchen Fläche an dem Orte, dessen Coordinaten x, y, z sind, für welchen also die Kraft R dieselbe bleibt, bei der Störung des Gleichgewichtes irgend ein Theilchen von der Dichte q_1 durch ein anderes von der Dichte q_2 ersetzt werden, und dann an diesem eine größere Kraft q_2 R angreifen, wenn $q_2 > q_1$ ist;

es muß daher dieses letztere mehr der von der Kraft R angestrebten Wirkung folgen, als das erstere; es muß sich deßhalb, wenn die störende Ursache aufhört, im Sinne dieser Kraft bewegen, bis wieder ein Gleichgewichtszustand eingetreten ist. Ist demnach das dichtere Theilchen aus einer im Sinne von R weiter vorwärts gelegenen Niveaufläche gekommen und hat sich bei der Störung des Gleichgewichtes im entgegengesetzten Sinne von R bewegt, so wird es sich nun wieder zurückbewegen und seine frühere Gleichgewichtslage einnehmen; ist es dagegen aus einer weiter rückwärts gelegenen Schichte gekommen und hat also bei der Störung des Gleichgewichtes eine Bewegung im Sinne von R erhalten, so wird es diese fortsetzen, bis es die Lage des stabilen Gleichgewichtes erlangt hat und nach einigen Oscillationen in dieser zur Ruhe kommt, wie ein materieller Punkt, welcher sich auf einer Fläche oder Curve im Gleichgewicht befindet und etwas aus seiner Gleichgewichtslage entfernt wird. (Buch I, §. 22).

§. 6.

In Bezug auf den Druck P in einem beliebigen Punkte eines flüssigen Systems können aus den Gleichungen (4) und (7) folgende allgemeinere Folgerungen gezogen werden.

1) Wenn auf die Flüssigkeit keine äußere Kraft wirkt, also $X = Y = Z = 0$ ist, so hat man für jeden Punkt derselben

$$P = P_0;$$

es ist also in diesem Falle der geometrische Druck P durch die ganze Flüssigkeit constant, oder es wird, wie man sich gewöhnlich ausdrückt, der auf irgend ein Theilchen ausgeübte Druck durch die ganze Flüssigkeit nach allen Richtungen unverändert fortgepflanzt, d. h. so, daß auf eine ebene Flächeneinheit überall und für jede Lage ihrer Ebene derselbe physische Druck ausgeübt wird. Dieser Satz wird meistens und namentlich in der Physik unter dem Namen: Archimedisches Princip als Axiom angenommen und bildet so die Grundlage für die Hydrostatik oder die Lehre vom Gleichgewicht der Flüssigkeiten.

Das Princip von der unveränderten Fortpflanzung des geometrischen Druckes findet aber nicht bloß in dem Falle statt, wo $X = Y = Z = 0$ ist, sondern auch, wie die Gleichungen (7) aussprechen, im allgemeinsten Falle; denn es geht aus diesen Gleichungen hervor, daß der Druck P in dem Punkte $x\,y\,z$ aus der Summe des in einem Punkte $x_0\,y_0\,z_0$ statthabenden und von da bis zu dem Punkte $x\,y\,z$

unverändert fortgepflanzten Druckes P_0 und des durch die geometrische Kraft $q R$ vom Punkte $x_0 y_0 z_0$ bis zum $x y z$ neu erzeugten Druckes: $\varphi(U) - \varphi(U_0)$ besteht.

2) Wenn R nicht Null ist, wenn man aber von dem Punkte $x_0 y_0 z_0$ aus nur in solchen Richtungen fortgeht, daß man hat

$$X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} = 0,$$

so findet man noch $P = P_0$; die Niveauflächen besitzen demnach auch noch die mechanische Eigenschaft, daß in der ganzen Ausdehnung einer solchen Fläche der Druck constant ist. Besitzt daher die Flüssigkeit eine freie (nicht von einer festen Wand begrenzte) Oberfläche, welche künftig mit dem Namen: Spiegelfläche bezeichnet werden soll, und wird auf diese ein in ihrer ganzen Ausdehnung constanter Druck ausgeübt, so muß dieselbe nothwendig die Form einer Niveaufläche haben, wenn sich die Flüssigkeit im Gleichgewichtszustande befindet und befinden soll. Diese Bedingung bleibt ungeändert, wenn die Flüssigkeit durch feste Wände in mehrere Abtheilungen getrennt ist, welche aber unter sich in Verbindung stehen, so daß man nach irgend einer geraden oder krummen Linie von Flüssigkeitstheilchen von einer Abtheilung zur andern gelangen kann, und wenn dabei von jedem durch die festen Wände erzeugten Bewegungswiderstande Umgang genommen wird. Denn im entgegengesetzten Falle, wenn nämlich ein solcher Widerstand zugelassen wird, besteht zwar noch Gleichgewicht, wenn die Spiegelflächen in den verschiedenen Abtheilungen derselben Niveaufläche angehören; es ist dieß aber für das Gleichgewicht nicht mehr nothwendig, es wird dann vielmehr wieder gewisse Grenzen des Gleichgewichtes geben, d. h. Grenzen, zwischen denen die eine Spiegelfläche von der Form und Lage der Niveaufläche, von welcher die andere Spiegelfläche einen Theil bildet, abweichen, und zwischen welchen doch Gleichgewicht bestehen kann.

Wird dagegen auf die Spiegelflächen in den verschiedenen Abtheilungen ein verschiedener, für jede einzelne Spiegelfläche aber constanter Druck ausgeübt, so wird zwar jede einzelne Spiegelfläche ein Theil einer Niveaufläche sein; sie werden aber alle verschiedenen Niveauflächen angehören und sich der Lage nach so ordnen, daß der Druck in einer Niveaufläche, welche die Flüssigkeit in allen Abtheilungen schneidet, durch alle Abtheilungen hindurch constant ist.

3) Wenn man von dem Punkte $x_0 y_0 z_0$ in irgend einer bestimmten

krummen Linie zu einem Punkte $x_1\,y_1\,z_1$ fortgeht, so daß x, y und z bestimmte Functionen von s werden, so wird der Ausdruck:

$$X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds}$$

die an dieser Curve tangentiale Componente von R und die Gleichung (4) wird mit Berücksichtigung des geänderten Zeichens bei P identisch mit der Gleichung (106) in §. 63 des vorhergehenden Buches für die Spannung eines vollkommen biegsamen Fadens. Es folgt daraus, daß für irgend eine flüssige Linie (eine Linie von Flüssigkeitstheilchen) der Druck nur gemäß der tangentialen Componenten der Kraft q R wächst, und daß jede solche Linie sich in demselben Zustande befindet, wie ein vollkommen biegsamer Faden von gleicher Dichte unter dem Einflusse derselben Kraft R, wobei jedoch hinzugedacht werden muß, daß dieser Faden durch eine feste Curve oder zwei sich schneidende feste Flächen, auf welche sich derselbe stützt, in der vorgeschriebenen Form erhalten wird. Es folgt ferner daraus, daß wenn auf dem Wege von dem Punkte $x_0\,y_0\,z_0$ zu dem Punkte $x_1\,y_1\,z_1$ die Function: $X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds}$ in einem Punkte x y z Null wird, wenn also die betreffende Curve dort eine Niveaufläche berührt, der Druck P im Allgemeinen daselbst einen größten oder kleinsten Werth hat, und zwar wird dieser größte oder kleinste Werth gleichzeitig mit dem größten oder kleinsten Werth der Function U in der betreffenden Curve statthaben, weil die Dichte q immer eine positive Größe sein und bleiben muß; es wird also da ein kleinster Werth eintreten, wo die Curve im Sinne von R gerichtet ist, oder genauer ausgedrückt, wo der Krümmungshalbmesser derselben einen spitzen Winkel mit der Richtung von R bildet, und ein größter Werth, wo dieser Winkel größer als ein rechter ist.

4) In den meisten Fällen der Anwendung ist die Dichte nicht in Function von U, sondern in Function von P gegeben, indem die Temperatur als constant vorausgesetzt wird, und es wird dann für die Gleichung (4) eine Umwandlung nothwendig. Man wird diese Gleichung unter der ebengenannten Voraussetzung auf beide in der Natur vorkommende Arten von Flüssigkeiten anwendbar machen, wenn man nach den in §. 3 ausgesprochenen Bemerkungen

$$8.) \qquad q = q_0 \left(\alpha + \beta \frac{P}{P_0}\right), \qquad \alpha + \beta = 1$$

setzt und unter q_0 die Dichte versteht, welche die Flüssigkeit unter einem Drucke P_0 besitzt, und man wird sich leicht überzeugen, daß αq_0 die Dichte ausdrückt, welche die Flüssigkeit unter dem Drucke $P = 0$ besitzt. Die Bedeutung von β ergibt sich dadurch, daß man $P = 2 P_0$ setzt und den entsprechenden Werth von q mit q_1 bezeichnet; man hat dann

$$q_1 = q_0 (\alpha + 2\beta) = q_0 (1 + \beta)$$

oder

$$\beta q_0 = q_1 - q_0$$

und schließt daraus, daß βq_0 den aus der Verdoppelung des Druckes P_0 entspringenden Zuwachs der Dichte q_0 bedeutet. Für die tropfbaren Flüssigkeiten wird β sehr klein, also α sehr nahe $= 1$, für die Gase dagegen wird α sehr klein und β sehr nahe der Einheit gleich; läßt man aber das Mariotte'sche Gesetz als vollkommen richtig zu, so wird $\alpha = 0$ und $\beta = 1$, also $q = 0$ für $P = 0$.

Mit dem Werthe (8) für q hat man nun zufolge der ersten der Gleichungen (7) in §. 5

$$\frac{1}{q_0\left(\alpha + \beta \frac{P}{P_0}\right)} \frac{dP}{ds} = \frac{dU}{ds},$$

und daraus folgt durch Integration mit der Beachtung, daß $\alpha + \beta = 1$,

$$\frac{P_0}{\beta q_0} \, logn \left(\alpha + \beta \frac{P}{P_0}\right) = U - U_0 \, .$$

Man zieht daraus für P den allgemeinen Werth:

$$P = P_0 \left[\frac{1}{\beta} \, e^{\frac{\beta q_0 (U - U_0)}{P_0}} - \frac{\alpha}{\beta}\right] \qquad (9.$$

und für die Dichte q den Ausdruck:

$$q = q_0 \, e^{\frac{\beta q_0 (U - U_0)}{P_0}} \qquad (10.$$

in Function von U.

Für die tropfbar-flüssigen Systeme ist β sehr klein; man kann daher in erster Annäherung

$$e^{\frac{\beta q_0 (U - U_0)}{P_0}} = 1 + \frac{\beta q_0 (U - U_0)}{P_0}$$

setzen und erhält damit und mit der Beachtung, daß $1 - \alpha = \beta$,

11.) $$P = P_0 \left(1 + \frac{q_0 (U - U_0)}{P_0}\right) = P_0 + q_0 (U - U_0) ,$$

wie auch aus den Gleichungen (7) hervorgeht, wenn $q = \varphi'(U)$ constant und gleich q_0 gesetzt wird, und man wird sich auch leicht überzeugen, daß der Werth (11) mit der Annahme $\beta = 0$, $\alpha = 1$ in den Gleichungen (8) übereinstimmt. Für eine größere Annäherung muß man daher noch ein Glied mehr in der Entwickelung der vorhergehenden Potenz von e nehmen und findet dann

12.) $$P = P_0 \left[1 + \frac{q_0 (U - U_0)}{P_0} \left(1 + \frac{1}{2} \beta \frac{q_0 (U - U_0)}{P_0}\right)\right].$$

Der dem Werthe (11) entsprechende Werth von q ist, wie schon bemerkt, $q = q_0$, und daher der dem Werthe (12) in gleicher Annäherung entsprechende

13.) $$q = q_0 \left(1 + \frac{\beta q_0 (U - U_0)}{P_0}\right).$$

Wenn für die gasförmig-flüssigen Systeme das Mariotte'sche Gesetz als streng richtig zugelassen wird, so daß $\beta = 1$, $\alpha = 0$ wird, so hat man aus (9) und (10) etwas einfacher

14.) $$P = P_0 \, e^{\frac{q_0 (U - U_0)}{P_0}}, \quad q = q_0 \, e^{\frac{q_0 (U - U_0)}{P_0}};$$

im andern Falle bleiben jene Gleichungen unverändert.

§. 7.

Die Berechnung des physischen Druckes, welchen eine Flüssigkeit auf irgend einen begrenzten Theil einer Fläche, sei es ein Theil der Wand des Gefäßes, welches die Flüssigkeit enthält, oder der Fläche eines in die Flüssigkeit eingetauchten Körpers, oder selbst nur einer in der Flüssigkeit gedachten Fläche ausübt, erfolgt ganz nach den im zweiten

Buche (Kapitel III oder VI des ersten Abschnittes) für feste Systeme entwickelten Verfahren zur Berechnung der Gesammtwirkung eines Systems paralleler oder veränderlich gerichteter Kräfte mit stetig aufeinanderfolgenden Angriffspunkten, jedoch mit der nöthigen Rücksicht auf den vorliegenden Fall, wie sie bereits in den Werthen von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ in §. 76 des vorhergehenden Buches angedeutet wurde.

Sei dazu die Gleichung der gedrückten Fläche, also der analytische Ausdruck ihrer Gestalt in Bezug auf unser bisheriges rechtwinkliges Coordinatensystem

$$z = F(x, y), \qquad (a.$$

und die Gleichungen der Curve, die das gedrückte Flächenstück begrenzt,

$$y = f_1(x), \quad z = f_2(x).$$

Diese letztern Gleichungen, welche auch die der Projectionen der begrenzenden Curve in den Coordinaten-Ebenen der xy und xz sind, werden mit der Gleichung (a) in einer solchen Verbindung stehen, daß die zweite von ihnen zum Vorschein kommt, wenn man y aus der ersten und (a) eliminirt, daß man also hat

$$f_2(x) = F[x, f_1(x)].$$

Man kann daraus auch nach Bedürfniß durch Elimination von x eine dritte Gleichung:

$$z = f_3(y)$$

für die Projection der begrenzenden Curve in der yz-Ebene ableiten und dabei beachten, daß weil das gedrückte Flächenstück jedenfalls von allen Seiten begrenzt sein muß, die begrenzende Curve eine geschlossene, in sich zurückkehrende sein wird, daß es also für die abhängigen Veränderlichen in den Gleichungen der Begrenzungscurve im Allgemeinen immer zwei Werthe für einen Werth der unabhängigen Veränderlichen geben muß, und daß diese letztern selbst immer einen größten und kleinsten Werth haben müssen. Scheiden wir daher diese Werthe aus, so erhalten wir für die Curve: $y = f_1(x)$, welche zwischen den Grenzen $x = a_1$ und $x = a_2$ liegt, für y die demselben x entsprechenden Werthe oder Grenzen:

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x),$$

welche beide der Gleichung: $y = f_1(x)$ genügen müssen. Ebenso er-

geben sich für die Curve: $z = f_2(x)$ die Grenzen $x = a_1$, $x = a_2$ für x und

$$z_1 = \psi_1(x), \quad z_2 = \psi_2(x)$$

für die denselben x zugehörenden z, und für die Curve $z = f_3(y)$ die Grenzwerthe: $y_1 = b_1$, $y_2 = b_2$ für y und

$$z_1 = \chi_1(y), \quad z_2 = \chi_2(y)$$

für die denselben y entsprechenden z.

Der geometrische Druck P ist in jedem Punkte normal zu der gedrückten Fläche gerichtet; seine fördernden Componenten nach den Coordinatenachsen sind demnach

$$P \cos\lambda, \quad P \cos\mu, \quad P \cos\nu,$$

wenn λ, μ, ν die Winkel der Normalen in dem Punkte $x\,y\,z$ der gegebenen Fläche mit den drei Achsen bedeuten, so daß man in Bezug auf die Gleichung (a) die Beziehungen:

$$\cos\nu = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}},$$

$$\cos\lambda = -\frac{dz}{dx}\cos\nu, \quad \cos\mu = -\frac{dz}{dy}\cos\nu$$

hat, mit welchen die Componenten von P die Form annehmen

$$-P\frac{dz}{dx}\cos\nu, \quad -P\frac{dz}{dy}\cos\nu, \quad P\cos\nu,$$

und worin der Winkel ν sich auf denjenigen Theil der Normalen beziehend vorausgesetzt wird, welcher in demselben Sinne wie P gerichtet ist.

Diese geometrischen Componenten sind nun die auf die Aenderung des Flächeninhaltes O bezogenen Aenderungsgesetze der entsprechenden Componenten: $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$, $\mathfrak{P}_z$ des fördernden physischen Druckes $\mathfrak{P}$, und man hat daher für $\mathfrak{P}_z$ z. B. die Beziehungen:

$$P\cos\nu = \frac{d\mathfrak{P}_z}{dO} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\mathfrak{P}_z}{dx\,dy} = \frac{d^2 O}{dx\,dy} P\cos\nu,$$

also mit der Beachtung, daß $\frac{d^2 O}{dx\,dy} = \sec\nu$ ist, und indem man

diese Beziehungen auch für die andern Componenten aufstellt,

$$\frac{d^2\mathfrak{P}_z}{dx\,dy} = P\,,\quad \frac{d^2\mathfrak{P}_y}{dx\,dy} = -P\frac{dz}{dy}\,,\quad \frac{d^2\mathfrak{P}_x}{dx\,dy} = -P\frac{dz}{dx}\,. \qquad (15.$$

Die erste dieser Beziehungen deutet unter Beachtung der nothwendigen Symmetrie derselben in Bezug auf die drei Veränderlichen darauf hin, daß auch die beiden andern eine einfachere Form annehmen müssen, wenn die Veränderlichen entsprechend getauscht werden; und in der That, wenn man in der zweiten Gleichung y als von x und z abhängig betrachtet, so hat man, $\frac{d\mathfrak{P}_y}{dx} = \mathfrak{P}_y'$ gesetzt, für ein constantes x

$$\frac{d\mathfrak{P}_y'}{dy} = \frac{d\mathfrak{P}_y'}{dz}\,\frac{dz}{dy} = -P\frac{dz}{dy}\,,$$

also einfach

$$\frac{d\mathfrak{P}_y'}{dz} = \frac{d^2\mathfrak{P}_y}{dx\,dz} = -P\,. \qquad (b.$$

Ebenso gibt die dritte, wenn man x als Function von y und z nimmt und $\frac{d\mathfrak{P}_x}{dy} = \mathfrak{P}_x'$ setzt,

$$\frac{d\mathfrak{P}_x'}{dx} = \frac{d\mathfrak{P}_x'}{dz}\,\frac{dz}{dx} = -P\frac{dz}{dx}\,,\quad \frac{d\mathfrak{P}_x'}{dz} = \frac{d^2\mathfrak{P}_x}{dy\,dz} = -P\,. \qquad (c.$$

Durch diese Vertauschung werden aber die drei Beziehungen insofern unabhängig von einander, als darin nicht mehr die gehörige Rücksicht auf den Sinn genommen ist, in welchem die Componenten des Druckes wirken, gerade so, wie in dem Falle, wo man die vorhergehenden Beziehungen ganz unabhängig von einander aufstellt, indem man z. B. schließt

$$P\cos\lambda\,\frac{d^2O}{dy\,dz} = \frac{d^2\mathfrak{P}_x}{dy\,dz} = P\cos\lambda\,.\sec\lambda\,,\quad \frac{d^2\mathfrak{P}_x}{dy\,dz} = P\,; \qquad (d.$$

die obigen Beziehungen (b) und (c) gelten nämlich streng nur für den Fall, wo die partiellen Aenderungsgesetze $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ positiv, und die letzten wie (d), wo sie negativ sind. Die Gleichungen (15) sind daher viel bestimmter und ersparen zugleich bei der Integration den Wechsel in den Grenzen der Veränderlichen; man hat darnach für die Compo-

nenten des auf das begrenzte Flächenstück ausgeübten fördernden physischen Druckes $\mathfrak{P}$ die Werthe:

$$16.)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}_x = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\,.\, - P\frac{dz}{dx}\,, \quad \mathfrak{P}_y = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\,.\, - P\frac{dz}{dy}\,, \\ \mathfrak{P}_z = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\,.\, P\;; \end{cases}$$

unter Anwendung von (b), (c) oder (d) dagegen muß man die drei Projectionen der Begrenzungscurve zu Hülfe nehmen und hat dann ohne Rücksicht auf das Zeichen der Componenten die Werthe:

$$17.)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}_x = \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{\chi_1(y)}^{\chi_2(y)} dz\,.\,P\,, \quad \mathfrak{P}_y = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dz\,.\,P\,, \\ \mathfrak{P}_z = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\,.\,P\,. \end{cases}$$

In besondern Fällen können übrigens die letzten Gleichungen entweder durch die aus ihnen zu schöpfende Erklärung, oder durch eine Vereinfachung der Integration einigen Vorzug vor den Gleichungen (16) erlangen, da es in keinem Falle Schwierigkeit haben kann, das Zeichen der Componenten unmittelbar zu bestimmen. Man erhält übrigens auch diese Zeichen richtig, wenn man im Allgemeinen, wie es aus (b) und (c) hervorgeht, $\mathfrak{P}_x$ und $\mathfrak{P}_y$ mit dem Zeichen — nimmt und auf die Uebereinstimmung der Grenzen achtet, ob z. B. die Grenzen $\psi_2(x)$ und $\varphi_2(x)$ oder $\psi_2(x)$ und $\varphi_1(x)$ demselben Punkt angehören, was eben davon abhängt, ob $\frac{dz}{dy}$ positiv oder negativ ist, und was daher darauf hinauskommt, die Zeichen der Componenten nach denen der partiellen Aenderungsgesetze: $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ zu bestimmen.

§. 8.

Im Allgemeinen übt die Flüssigkeit durch ihren Druck außer der fördernden Wirkung $\mathfrak{P}$ auch eine drehende Wirkung $\mathfrak{M}$ aus, deren

um die Achsen der x, y und z drehende Componenten $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ sich in ähnlicher Weise aus den geometrischen Momenten von P in Bezug auf diese Achsen berechnen lassen, wie die fördernden Kräfte $\mathfrak{P}_x$, etc. aus den fördernden Componenten $P \cos\lambda$, etc.. Man hat für die drehenden Componenten M_x, M_y, M_z von P in dem Punkte xyz die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= P\,(y\cos\nu - z\cos\mu) = P\cos\nu\left(y + z\frac{dz}{dy}\right), \\ M_y &= P\,(z\cos\lambda - x\cos\nu) = -P\cos\nu\left(z\frac{dz}{dx} + x\right), \\ M_z &= P\,(x\cos\mu - y\cos\lambda) = -P\cos\nu\left(x\frac{dz}{dy} - y\frac{dz}{dx}\right); \end{aligned}\right\}$$

ferner finden wieder die Beziehungen statt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\mathfrak{M}_x}{dx\,dy} = M_x\frac{d^2 O}{dx\,dy} = M_x \sec\nu &= P\left(y + z\frac{dz}{dy}\right), \\ \frac{d^2\mathfrak{M}_y}{dx\,dy} = M_y \sec\nu &= -P\left(z\frac{dz}{dx} + x\right), \\ \frac{d^2\mathfrak{M}_z}{dx\,dy} = M_z \sec\nu &= -P\left(x\frac{dz}{dy} - y\frac{dz}{dx}\right), \end{aligned}\right\}$$

und daraus zieht man die physischen drehenden Componenten in der Form:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_x &= \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \,.\; P\left(y + z\frac{dz}{dy}\right), \\ \mathfrak{M}_y &= \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \,.\, -P\left(z\frac{dz}{dx} + x\right), \\ \mathfrak{M}_z &= \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \,.\, -P\left(x\frac{dz}{dy} - y\frac{dz}{dx}\right). \end{aligned}\right\} \quad (18.$$

Zerlegt man aber diese Integrale nach den innern Summengliedern und führt die oben angewendete Vertauschung der Veränderlichen ein unter Berücksichtigung des entsprechenden Zeichens für die einzelnen Glieder, so findet man

$$19.)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_x = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\,.\,Py \;-\; \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dz\,.\,Pz\,, \\ \mathfrak{M}_y = \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{\chi_1(y)}^{\chi_2(y)} dz\,.\,Pz \;-\; \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\,.\,Px\,, \\ \mathfrak{M}_z = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dz\,.\,Px \;-\; \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{\chi_1(y)}^{\chi_2(y)} dz\,.\,Py\,. \end{cases}$$

In diesen Werthen sind die Zeichen wieder richtig, wenn $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ negativ sind; im entgegengesetzten Falle sind die Zeichen der Glieder mit Pz in $\mathfrak{M}_x$ und $\mathfrak{M}_y$ und beider Glieder von $\mathfrak{M}_z$ zu wechseln.

Um auch dieses zu umgehen, kann man die Componenten $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$, $\mathfrak{P}_z$ als allgemeine Resultirenden der parallelen Kräfte $P\,\cos\lambda$, $P\,\cos\mu$, $P\,\cos\nu$ betrachten und die Abstände ihrer Richtungen von den Coordinatenebenen bestimmen. Bezeichnet man dazu wie in §. 38 des vorhergehenden Buches die Coordinaten eines Punktes in der Richtung von $\mathfrak{P}_x$ mit x_1, y_1, z_1, in der von $\mathfrak{P}_y$ mit x_2, y_2, z_2, und in der von $\mathfrak{P}_z$ mit x_3, y_3, z_3, so bleiben bekanntlich x_1, y_2 und z_3 unbestimmt, und für die übrigen hat man nach §. 23 des zweiten Buches die Beziehungen:

$$\frac{d^2.\mathfrak{P}_x y_1}{dy\,dz} = y\,\frac{d^2\mathfrak{P}_x}{dy\,dz} = Py\,, \quad \text{u. s. f.}$$

also

$$20.)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}_x y_1 = \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{\chi_1(y)}^{\chi_2(y)} dz\,.\,Py, & \mathfrak{P}_x z_1 = \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{\chi_1(y)}^{\chi_2(y)} dz\,.\,Pz\,, \\ \mathfrak{P}_y x_2 = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dz\,.\,Px, & \mathfrak{P}_y z_2 = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dz\,.\,Pz\,, \\ \mathfrak{P}_z x_3 = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\,.\,Px, & \mathfrak{P}_z y_3 = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\,.\,Py\,. \end{cases}$$

Daraus ergeben sich die Abstände y_1, z_1, x_2, etc. in der Form:

$$y_1 = \frac{\mathfrak{P}_x y_1}{\mathfrak{P}_x} = \frac{\int_{b_1}^{b_2} dy \int_{\chi_1(y)}^{\chi_2(y)} dz \, . \, Py}{\int_{b_1}^{b_2} dy \int_{\chi_1(y)}^{\chi_2(y)} dz \, . \, P} \; , \quad x_2 = \frac{\mathfrak{P}_y x_2}{\mathfrak{P}_y} = \frac{\int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dz \, . \, Px}{\int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dz \, . \, P} \; ,$$

u. s. f.

und die Momente $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$ und $\mathfrak{M}_z$ werden

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_x = \mathfrak{P}_z y_3 - \mathfrak{P}_y z_2 \; , \quad \mathfrak{M}_y = \mathfrak{P}_x z_1 - \mathfrak{P}_z x_3 \; , \\ \mathfrak{M}_z = \mathfrak{P}_y x_2 - \mathfrak{P}_x y_1 \; . \end{aligned}\right\} \quad (21.$$

Soll nun das ganze System von Kräften P eine allgemeine Resultirende haben, d. h. soll die von der Flüssigkeit auf das betreffende Flächenstück ausgeübte Wirkung vollständig durch eine einzige Kraft ersetzt werden können, welche jedenfalls der fördernden Resultirenden $\mathfrak{P}$ gleich sein muß, so müssen die fördernden Componenten $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$, $\mathfrak{P}_z$ und die vorhergehenden Momente der Bedingung:

$$\mathfrak{P}_x \mathfrak{M}_x + \mathfrak{P}_y \mathfrak{M}_y + \mathfrak{P}_z \mathfrak{M}_z = 0 \qquad (22.$$

genügen (Bd. II, §. 82), welche mit den Werthen (21) die Form:

$$\mathfrak{P}_x \mathfrak{P}_y (z_1 - z_2) + \mathfrak{P}_x \mathfrak{P}_z (y_3 - y_1) + \mathfrak{P}_y \mathfrak{P}_z (x_2 - x_3) = 0$$

annimmt und daher unabhängig von $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$, $\mathfrak{P}_z$ befriedigt werden kann, wenn die Bedingungen:

$$x_2 = x_3 \; , \quad y_1 = y_3 \; , \quad z_1 = z_2 \qquad (23.$$

erfüllt sind, d. h. wenn die partiellen allgemeinen Resultirenden $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$, $\mathfrak{P}_z$ je zwei in einer Ebene liegen, sich also alle drei in einem und demselben Punkte schneiden. In diesem Falle wird dann durch den betreffenden Schnittpunkt auch die Richtung der allgemeinen Resultirenden $\mathfrak{P}$ des ganzen Systems gehen, deren Winkel l, m, n mit den Achsen durch die bekannten Beziehungen:

$$\cos l = \frac{\mathfrak{P}_x}{\mathfrak{P}} \; , \quad \cos m = \frac{\mathfrak{P}_y}{\mathfrak{P}} \; , \quad \cos n = \frac{\mathfrak{P}_z}{\mathfrak{P}} \; ,$$

$$\mathfrak{P}^2 = \mathfrak{P}_x^2 + \mathfrak{P}_y^2 + \mathfrak{P}_z^2$$

gegeben sind.

In jedem andern Falle wird die Richtung des resultirenden Druckes $\mathfrak{P}$ durch zwei der drei Gleichungen:

$$23.) \left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{P}_z Y - \mathfrak{P}_y Z = \mathfrak{M}_x \ , \quad \mathfrak{P}_x Z - \mathfrak{P}_z X = \mathfrak{M}_y \ , \\ \mathfrak{P}_y X - \mathfrak{P}_x Y = \mathfrak{M}_z \\ \text{oder} \\ \mathfrak{P}_z (Y - y_3) = \mathfrak{P}_y (Z - z_2) \ , \quad \mathfrak{P}_x (Z - z_1) = \mathfrak{P}_z (X - x_3) , \\ \mathfrak{P}_y (X - x_2) = \mathfrak{P}_x (Y - y_1) \end{array} \right.$$

bestimmt, worin X, Y, Z zunächst als laufende Coordinaten zu betrachten sind. Diese Gleichungen bestimmen aber auch, mit der Gleichung der gedrückten Fläche verbunden, den Durchgangspunkt jener Richtung durch diese Fläche, welchen man dann als eigentlichen Angriffspunkt der Kraft $\mathfrak{P}$ annimmt und Mittelpunkt des Druckes nennt, weil das gedrückte Flächenstück, für sich und ohne Zusammenhang mit den anstoßenden Theilen der Fläche gedacht, im Gleichgewicht bleiben muß, wenn es in dem genannten Punkte in einem der Kraft $\mathfrak{P}$ entgegengesetzten Sinne gestützt wird.

Wird die Bedingung (22) nicht erfüllt, so gibt es keinen resultirenden Druck und daher auch keinen Mittelpunkt des Druckes; die von der Flüssigkeit ausgeübte Wirkung kann dann zwar immer durch zwei Kräfte ersetzt werden (Buch II, §. 84); sie wird aber am anschaulichsten durch die drei partiellen allgemeinen Resultirenden

$$\mathfrak{P}_x \ , \quad \mathfrak{P}_y \ , \quad \mathfrak{P}_z$$

dargestellt. Für die Richtung einer jeden dieser Kräfte wird es aber immer einen besondern Schnittpunkt auf der gedrückten Fläche geben, welcher als Mittelpunkt des entsprechenden partiellen Druckes betrachtet werden kann.

§. 9.

Im Vorhergehenden war angenommen, daß das Flächenstück, für welches der physische Druck der Flüssigkeit berechnet werden soll, von einer stetigen Curve begrenzt sei; man wird aber leicht einsehen, daß die Gleichungen:

$$y_1 = \varphi_1 (x) \ , \quad z_1 = \psi_1 (x) \ , \quad z_1 = \chi_1 (y)$$

und die Gleichungen:

$$y_2 = \varphi_2(x) \quad , \quad z_2 = \psi_2(x) \quad , \quad z_2 = \chi_2(y)$$

auch Zweigen zweier verschiedenen Curven angehören können, ohne daß dadurch in der Berechnung des Druckes $\mathfrak{P}$ etwas geändert wird; die Grenzwerthe a_1 und a_2 von x, b_1 und b_2 von y werden dann die Abstände vom Anfangspunkte der Coordinaten der beiden zur yz-Ebene und der beiden zur xz-Ebene parallelen Ebenen sein, welche das begrenzte Flächenstück oder dessen Projectionen in den Coordinaten-Ebenen einschließen. Kann daher dieses Flächenstück nicht durch zwei stetige Curven oder Cylinderflächen und zwei solche parallele Ebenen begrenzt werden, so muß man dasselbe in mehrere auf die obengenannte Weise begrenzte Theile zerlegen und die dafür sich ergebenden Werthe $\mathfrak{P}_x'$, $\mathfrak{P}_x''$, etc. von $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y'$, $\mathfrak{P}_y''$, etc. von $\mathfrak{P}_y$, u. s. f. summiren. Unter Anwendung der Gleichungen (17) wird dann auch im Allgemeinen für die Berechnung von $\mathfrak{P}_x$ eine andere Zerlegung nothwendig werden, als für die von $\mathfrak{P}_y$ und $\mathfrak{P}_z$, weil die Projection auf die yz-Ebene eines Flächenstückes, das von zwei zur x-Achse senkrechten Ebenen und zwei zur xy-Ebene senkrechten Cylinderflächen begrenzt wird, im Allgemeinen nicht auch durch zwei mit der z-Achse parallele Geraden und zwei Curven begrenzt sein kann, wie es bei der Projection auf die xz-Ebene noch der Fall ist.

In besonderen Fällen, welche von der Gestalt der gedrückten Fläche und der begrenzenden Curve abhängen, können mit Vortheil statt der rechtwinkligen die Kugel-Coordinaten r, ω, ϑ oder die Cylinder-Coordinaten r, ω, z angewendet werden. Man wird dazu zunächst die Winkel λ, μ, ν, welche die Normale zur gedrückten Fläche oder die Richtung des geometrischen Druckes P mit drei rechtwinkligen Achsen macht, mittels der einen oder andern Gleichung:

$$r = F_1(\omega, \vartheta) \quad , \quad z = F_2(r, \omega)$$

dieser Fläche in Function der entsprechenden Coordinaten und beziehungsweise ihrer Aenderungsgesetze ausdrücken und hat dann die Beziehungen:

$$\frac{d^2 . \mathfrak{P}_x}{d\omega\, d\vartheta} = \frac{d^2 O}{d\omega\, d\vartheta} P \cos\lambda \quad , \quad \frac{d^2 . \mathfrak{P}_x}{dr\, d\omega} = \frac{d^2 O}{dr\, d\omega} P \cos\lambda ,$$

u. s. f. — u. s. f.

Für Kugel-Coordinaten hat man aber nach §. 54 des zweiten Buches

$$\frac{d^2 O}{d\omega\, d\vartheta} = r \sin\vartheta \left(\frac{dr}{d\vartheta} \sin\vartheta + r \cos\vartheta \right) \sec\nu$$

und

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\cos\vartheta\;\cos\omega}{\sin\vartheta} - \frac{\mathfrak{r}\cos\omega + \frac{d\mathfrak{r}}{d\omega}\sin\omega}{\sin\vartheta\left(\frac{d\mathfrak{r}}{d\vartheta}\sin\vartheta + \mathfrak{r}\cos\vartheta\right)},$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\cos\vartheta\;\sin\omega}{\sin\vartheta} - \frac{\mathfrak{r}\sin\omega - \frac{d\mathfrak{r}}{d\omega}\cos\omega}{\sin\vartheta\left(\frac{d\mathfrak{r}}{d\vartheta}\sin\vartheta + \mathfrak{r}\cos\vartheta\right)},$$

und damit folgt

$$\frac{d^2 O}{d\omega\, d\vartheta}\cos\nu = \mathfrak{r}\sin\vartheta\left(\frac{d\mathfrak{r}}{d\vartheta}\sin\vartheta + \mathfrak{r}\cos\vartheta\right)$$

$$\frac{d^2 O}{d\omega\, d\vartheta}\cos\mu = -\frac{d^2 O}{d\omega\, d\vartheta}\,\frac{dz}{dy}\cos\nu$$
$$= \mathfrak{r}^2\sin^2\vartheta\sin\omega - \mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{d\omega}\cos\omega - \mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{d\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\omega,$$

$$\frac{d^2 O}{d\omega\, d\vartheta}\cos\lambda = -\frac{d^2 O}{d\omega\, d\vartheta}\,\frac{dz}{dx}\cos\nu$$
$$= \mathfrak{r}^2\sin^2\vartheta\cos\omega + \mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{d\omega}\sin\omega - \mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{d\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\omega.$$

Man zieht daraus zur Berechnung von $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$, $\mathfrak{P}_z$ die Formeln:

$$24^a.)\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{P}_x &= \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} d\vartheta . P\Big(\mathfrak{r}^2\sin^2\vartheta\cos\omega + \mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{d\omega}\sin\omega \\
&\qquad\qquad - \mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{d\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\omega\Big),\\
\mathfrak{P}_y &= \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} d\vartheta . P\Big(\mathfrak{r}^2\sin^2\vartheta\sin\omega - \mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{d\omega}\cos\omega \\
&\qquad\qquad - \mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{d\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\omega\Big),\\
\mathfrak{P}_z &= \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} d\vartheta . P\Big(\mathfrak{r}^2\sin\vartheta\cos\vartheta + \mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{d\vartheta}\sin^2\vartheta\Big),
\end{aligned}\right.$$

worin die angezeigten Grenzwerthe der Veränderlichen ω und ϑ sich

auf die begrenzende Curve beziehen und ganz in der am angeführten Orte (Buch II, §. 54) angegebenen Weise bestimmt werden.

Für Cylinder-Coordinaten hat man einfacher

$$\frac{d^2 O}{dr\, d\omega} = r \sec\nu \quad , \qquad \frac{d^2 O}{dr\, d\omega} \cos\nu = r \quad ,$$

und mittels der Gleichungen: $x^2 + y^2 = r^2$, $y = x \tang \omega$ findet man leicht

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dr}\frac{dr}{dx} + \frac{dz}{d\omega}\frac{d\omega}{dx} = \frac{dz}{dr}\cos\omega - \frac{dz}{d\omega}\frac{\sin\omega}{r} \;,$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dr}\frac{dr}{dy} + \frac{dz}{d\omega}\frac{d\omega}{dy} = \frac{dz}{dr}\sin\omega + \frac{dz}{d\omega}\frac{\cos\omega}{r} \;,$$

und damit ergibt sich ferner

$$\frac{d^2O}{dr\,d\omega}\cos\lambda = -\frac{d^2O}{dr\,d\omega}\frac{dz}{dx}\cos\nu = \frac{dz}{d\omega}\sin\omega - r\frac{dz}{dr}\cos\omega \;,$$

$$\frac{d^2O}{dr\,d\omega}\cos\mu = -\frac{d^2O}{dr\,d\omega}\frac{dz}{dy}\cos\nu = -\frac{dz}{d\omega}\cos\omega - r\frac{dz}{dr}\sin\omega \;.$$

Zur Berechnung der Componenten $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$ und $\mathfrak{P}_z$ hat man demnach unter Anwendung von Cylinder-Coordinaten die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{P}_x &= \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{r_0}^{r_1} dr \,.\, P\left(\frac{dz}{d\omega}\sin\omega - r\frac{dz}{dr}\cos\omega\right) \;,\\
\mathfrak{P}_y &= \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{r_0}^{r_1} dr \,.\, -P\left(\frac{dz}{d\omega}\cos\omega + r\frac{dz}{dr}\sin\omega\right) \;,\\
\mathfrak{P}_z &= \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{r_0}^{r_1} dr \,.\, Pr \;,
\end{aligned}\right\} \quad (24^b.$$

und die Grenzwerthe der Veränderlichen r und ω müssen nun so bestimmt werden, daß man die Begrenzungscurve auf die xy projicirt und die Gleichung: $r = f(\omega)$ dieser Projection ableitet, welche für denselben Werth von ω zwei Werthe: $r_1 = \varphi_1(\omega)$, $r_0 = \varphi_0(\omega)$

als Grenzwerthe von r in Function von ω geben wird; die Grenzwerthe von ω sind die Winkel, welche zwei durch die z=Achse gelegte, die Begrenzungscurve berührende Ebenen mit der xz=Ebene einschließen.

Für einzelne Fälle können sowohl die Integrale (24ᵃ) als (24ᵇ) nach den einzelnen Gliedern zerlegt und dann darin wie in den Integralen (16) die Veränderlichen getauscht werden; man kann z. B. die erste der Gleichungen (24ᵃ) in folgende umwandeln:

$$\mathfrak{P}_x = \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} d\vartheta \,.\, P\mathfrak{r}^2 \sin^2\vartheta \cos\omega + \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} d\vartheta \,.\, P\mathfrak{r} \frac{d\mathfrak{r}}{d\omega} \sin\omega$$

$$- \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} d\vartheta \,.\, P\mathfrak{r} \frac{d\mathfrak{r}}{d\vartheta} \sin\vartheta \cos\vartheta \cos\omega$$

$$= \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} d\vartheta \,.\, P\mathfrak{r}^2 \sin^2\vartheta \cos\omega + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} d\vartheta \int_{\mathfrak{r}_0}^{\mathfrak{r}_1} d\mathfrak{r} \,.\, P\mathfrak{r} \sin\omega$$

$$- \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{\mathfrak{r}_0}^{\mathfrak{r}_1} d\mathfrak{r} \,.\, P\mathfrak{r} \sin\vartheta \cos\vartheta \cos\omega \,,$$

die erste der Gleichungen (24ᵇ) in

$$\mathfrak{P}_x = \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{r_0}^{r_1} dr \,.\, P \frac{dz}{d\omega} \sin\omega - \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{r_0}^{r_1} dr \,.\, P \frac{dz}{dr} \cos\omega$$

$$= \int_{r_0}^{r_1} dr \int_{z_0}^{z_1} dz \,.\, P \sin\omega - \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{z_0}^{z_1} dz \,.\, P \cos\omega \,;$$

man wird aber leicht einsehen, daß dazu jede der Veränderlichen ω, ϑ und $\mathfrak{r}$ mittels der Gleichung der gedrückten Fläche durch die zwei andern ausgedrückt werden muß, und daß es hier sehr darauf ankommt, die Grenzwerthe in Uebereinstimmung zu erhalten, damit die Zeichen der einzelnen Glieder richtig werden.

Ganz in derselben Weise wie die fördernden Componenten $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$, $\mathfrak{P}_z$ werden auch die Momente: $\mathfrak{P}_x y_1$, $\mathfrak{P}_x z_1$, $\mathfrak{P}_y x_2$, u. s. f. der partiellen allgemeinen Resultirenden $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$, $\mathfrak{P}_z$ berechnet; denn man hat wieder für Kugel-Coordinaten

$$\frac{d^2 \mathfrak{P}_x \mathfrak{y}_1}{d\omega\, d\vartheta} = y \frac{d^2 \mathfrak{P}_x}{d\omega\, d\vartheta} = P y \frac{d^2 O}{d\omega\, d\vartheta} \cos\lambda\,, \quad y = \mathfrak{r} \sin\vartheta \sin\omega$$

u. s. f.,

und daher

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{P}_x \mathfrak{y}_1 &= \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} d\vartheta \,.\, P \mathfrak{r} \sin\vartheta \sin\omega \Big(\mathfrak{r}^2 \sin^2\vartheta \cos\omega \\
&\qquad + \mathfrak{r} \frac{d\mathfrak{r}}{d\omega} \sin\omega - \mathfrak{r} \frac{d\mathfrak{r}}{d\vartheta} \sin\vartheta \cos\vartheta \cos\omega\Big)\,, \\
\mathfrak{P}_x \mathfrak{z}_1 &= \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} d\vartheta \,.\, P \mathfrak{r} \cos\vartheta \Big(\mathfrak{r}^2 \sin^2\vartheta \cos\omega \\
&\qquad + \mathfrak{r} \frac{d\mathfrak{r}}{d\omega} \sin\omega - \mathfrak{r} \frac{d\mathfrak{r}}{d\vartheta} \sin\vartheta \cos\vartheta \cos\omega\Big)\,, \\
\mathfrak{P}_z \mathfrak{x}_3 &= \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} d\vartheta \,.\, P \mathfrak{r} \sin\vartheta \cos\omega \Big(\mathfrak{r}^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \\
&\qquad + \mathfrak{r} \frac{d\mathfrak{r}}{d\vartheta} \sin^2\vartheta\Big)\,,
\end{aligned}\right\} \quad (25^a.$$

u. s. f.

Für Cylinder-Coordinaten dagegen ist:

$$\frac{d^2 . \mathfrak{P}_x \mathfrak{y}_1}{d\omega\, dr} = y \frac{d^2 \mathfrak{P}_x}{d\omega\, dr} = P y \frac{d^2 O}{d\omega\, dr} \cos\lambda\,, \quad y = r \sin\omega$$

u. s. f.;

mithin hat man die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{P}_x \mathfrak{y}_1 &= \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{r_0}^{r_1} dr \,.\, P r \sin\omega \left(\frac{dz}{d\omega} \sin\omega - r \frac{dz}{dr} \cos\omega\right)\,, \\
\mathfrak{P}_x \mathfrak{z}_1 &= \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{r_0}^{r_1} dr \,.\, P z \left(\frac{dz}{d\omega} \sin\omega - r \frac{dz}{dr} \cos\omega\right)\,, \\
\mathfrak{P}_y \mathfrak{x}_2 &= \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_{r_0}^{r_1} dr \,.\, - P r \cos\omega \left(\frac{dz}{d\omega} \cos\omega + r \frac{dz}{dr} \sin\omega\right)\,,
\end{aligned}\right\} \quad (25^b.$$

u. s. f.

Im Uebrigen bleiben die Gleichungen (21) zur Berechnung der Momente: $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ und die weiteren Folgerungen des vorhergehenden §. unverändert bestehen.

§. 10.

Um nun von den vorhergehenden allgemeinen Untersuchungen einige Anwendungen auf besondere Fälle zu machen, wollen wir zunächst von der einfachen, aber für die irdischen Verhältnisse wichtigsten Voraussetzung ausgehen, daß auf die Flüssigkeitstheilchen nur eine constante und parallel gerichtete Kraft, die Schwere, wirke, daß also die geometrische Kraft: qR für jeden Punkt des flüssigen Systems gleich qg sei, wenn g die für die ganze Ausdehnung des Systems constant vorausgesetzte Beschleunigung des freien Falles bezeichnet.

Nehmen wir dazu wieder die z-Achse parallel zur Richtung der Schwere oder vertical und die z im Sinne dieser Kraft, also abwärts positiv an und lassen die Lage der xy-Ebene, sowie die der Achsen der x und y noch unbestimmt, so haben wir $X = 0$, $Y = 0$, $Z = g$, und für unsere Function U wird einfach

26.) $$\frac{dU}{ds} = g\frac{dz}{ds} \quad , \qquad U = gz \quad , \qquad U_0 = gz_0 \quad .$$

Die Gleichung der Niveauflächen wird also ebenfalls einfach

$$z - z_0 = 0 \quad ,$$

also die Gleichung einer horizontalen Ebene. Eine schwere Flüssigkeit, tropfbar- oder elastisch-flüssig, auf welche sonst keine Kraft wirkt, kann demnach nur dann im Gleichgewicht sein, wenn in der ganzen Ausdehnung längs einer und derselben Horizontal-Ebene, die Dichte, folglich auch die Temperatur constant ist, und dann ist auch der Druck in allen Punkten einer solchen Ebene derselbe. Wenn die Flüssigkeit eine freie Oberfläche hat, und auf diese ein constanter Druck ausgeübt wird, so muß dieselbe ebenfalls eine horizontale Ebene bilden, und mehrere schwere Flüssigkeiten von verschiedener Dichte werden sich im Gleichgewicht befinden, wenn sie nach horizontalen Ebenen von einander abgesondert sind oder sich nach solchen Ebenen berühren. Dabei ist es für das Gleichgewicht an und für sich ganz gleichgültig, in welcher Ordnung diese Flüssigkeiten geschichtet sind; stabil wird das Gleichgewicht aber nur dann sein, wenn sie in Bezug auf ihre Dichte

im Sinne der Schwere geordnet sind, d. h. so daß die Dichte abwärts zunimmt, die specifisch leichteste Flüssigkeit sich also oben befindet und die specifisch schwerste die tiefste Lage einnimmt oder die unterste Schichte bildet.

Wenn eine homogene Flüssigkeit durch feste Wände in mehrere Abtheilungen von beliebigen Querschnitten getheilt ist, welche unter sich so in Verbindung stehen, daß man in der Flüssigkeit selbst von einer Abtheilung zur andern übergehen kann, so muß auch hier in jeder horizontalen Ebene der Druck durch alle Abtheilungen hindurch constant sein, und wenn daher in den verschiedenen Abtheilungen Spiegelflächen vorhanden sind, und auf diese ein constanter Druck P_0 ausgeübt wird, so müssen alle in derselben Horizontal-Ebene liegen. Wird in einzelnen Abtheilungen auf die Spiegelfläche der Flüssigkeit ein größerer oder kleinerer Druck ausgeübt, so ordnen sich die einzelnen Spiegelflächen in ihren verticalen Abständen so, daß in einer horizontalen Ebene, welche die Flüssigkeit in allen Abtheilungen schneidet, der Druck constant ist.

Befinden sich dagegen in zwei unter sich in Verbindung stehenden Gefäßen zwei Flüssigkeiten von verschiedener Dichte, auf welche ein gleicher oder ungleicher Druck ausgeübt wird, so reichen die Niveauflächen im Allgemeinen nicht mehr durch beide Gefäße hindurch; es können dann nur diejenigen horizontalen Ebenen als durchgehende Niveauflächen bezeichnet werden, welche die in Verbindung stehenden Theile derselben Flüssigkeit in beiden Gefäßen schneiden, und nur in diesen wird der Druck constant sein; die übrigen Niveauflächen sind nach den Gefäßen begrenzt, und in einer horizontalen Ebene, welche beide Flüssigkeiten schneidet, ist der Druck in jeder Flüssigkeit ein anderer, und dieß ist selbst dann der Fall, wenn jene Ebene dieselbe Flüssigkeit zweimal schneidet, die beiden geschnittenen Theile aber nicht in directer Verbindung stehen. Wenn z. B. Fig. 1 den verticalen Durchschnitt zweier in Verbindung stehender Gefäße vorstellt, und darin A und B Flüssigkeiten von gleicher Art oder Dichte bedeuten, C C eine Flüssigkeit von größerer Dichte, welche sich in beide Gefäße verbreitet hat und in ununterbrochener Verbindung steht, so sind die horizontalen Ebenen a a und b b, welche diese letztere Flüssigkeit in beiden Gefäßen schneiden, durchgehende Niveauflächen, und erleiden in allen Punkten gleichen Druck; die Schnitt-Ebenen c c und d d oder e e und f f dagegen, die je zwei derselben horizontalen Ebene angehören, sind nur partielle Niveauflächen für jedes der beiden Gefäße einzeln genommen, und der Druck in c c ist ein anderer als in d d, in e e ein anderer als in f f, obgleich die beiden letztern die gleichdichten Flüssigkeiten A

und B schneiden, weil diese Flüssigkeiten nicht unmittelbar, sondern durch die Flüssigkeit CC in Verbindung stehen.

§. 11.

Mit den obigen Werthen (26) von U und U_0 ergibt sich für den geometrischen Druck P in einem beliebigen Punkte einer schweren homogenen Flüssigkeit nach (9) der allgemeine Ausdruck:

$$27.)\qquad P = P_0 \left(\frac{1}{\beta}\, e^{\frac{\beta q_0 g (z - z_0)}{P_0}} - \frac{\alpha}{\beta}\right),$$

und nach (10) für die geometrische Dichte q der Werth:

$$28.)\qquad q = q_0\, e^{\frac{\beta q_0 g (z - z_0)}{P_0}}.$$

Für völlig unzusammendrückbare Flüssigkeiten folgt daraus oder aus (11)

$$29.)\quad \begin{cases} P = P_0 + q_0 g\,(z - z_0) = P_0 + p_0\,(z - z_0)\,, \\ q = q_0\,, \qquad p = p_0\,, \end{cases}$$

wenn p = q g das geometrische Gewicht der Flüssigkeit bezeichnet, und diese Werthe gelten auch bei sehr wenig zusammendrückbaren, wie es unsere meisten tropfbar-flüssigen Stoffe sind, als erste Näherungswerthe; für solche Stoffe ändert sich also der Druck nahezu proportional dem verticalen Abstand der zweiten Niveau-Ebene von der ersten. Mit größerer Genauigkeit jedoch hat man für diese nach (12) und (13)

$$30.)\quad \begin{cases} P = P_0 \left[1 + \frac{p_0 (z - z_0)}{P_0} \left(1 + \frac{1}{2} \beta \frac{p_0 (z - z_0)}{P_0}\right)\right], \\ p = p_0 \left(1 + \frac{\beta p_0 (z - z_0)}{P_0}\right); \end{cases}$$

für größere Annäherung wächst also die Dichte oder das geometrische Gewicht proportional dem verticalen Abstand der betreffenden Niveau-Ebenen, und der Druck in einem größeren Verhältniß.

Nehmen wir z. B. Wasser und bezeichnen sein geometrisches Gewicht oder (weil dieses constant ist) das Gewicht der Volumeneinheit

unter dem atmosphärischen Normaldruck $P_0 = \mathbf{P}$ und bei der Temperatur 4^0 C mit p_0, setzen diese Temperatur als constant voraus und lassen als ein Ergebniß der Erfahrung zu, daß die Dichte oder das Gewicht der Volumeneinheit durch den neu hinzugefügten Druck $\mathbf{P}$ um $\frac{45}{1000000}$ vermehrt werde, so haben wir nach dem, was in §. 6 gesagt wurde,

$$\beta = 0{,}000045 \quad , \qquad \alpha = 1 - 0{,}000045 \ ;$$

unter dem Drucke $P = 0$ würde also das Gewicht des Wassers

$$p = 0{,}999955\, p_0 \quad ,$$

und wenn auf der Spiegelfläche des Wassers schon der Druck $\mathbf{P}$ lastet, und wir diese als xy-Ebene annehmen, so haben wir in einer Tiefe z unter der Spiegelfläche das Gewicht

$$p = p_0 \left(1 + \frac{0{,}000045\ p_0\, z}{\mathbf{P}}\right) .$$

Damit demnach das Wasser die doppelte Dichte erhalte, bedürfte es bei constanter Temperatur einer Tiefe von

$$z = \frac{\mathbf{P}}{0{,}000045\ p_0} \text{ Längeneinheiten.}$$

Für metrisches Maaß und den Meter als Längeneinheit hat man $\mathbf{P} = 10332$ Kilogr., $p_0 = 1000$ Kilogr., folglich

$$z = 229600 \text{ Meter oder über } 31 \text{ Meilen.}$$

Für eine Tiefe von 1000 Meter dagegen ergibt sich

$$p = p_0 \left(1 + \frac{45}{10332}\right) = p_0\,(1 + 0{,}004355\,..) \ ;$$

dort wiegt also ein Kubikmeter Wasser etwa $1004\frac{1}{3}$ Kilogr. oder um $4\frac{1}{3}$ Kilogr. mehr, als an der Oberfläche.

Der Druck P in der Tiefe z ist mit Vernachlässigung der Zusammendrückbarkeit

$$P = \mathbf{P} + p_0\, z = (10332 + 1000\ z^{\text{met.}}) \text{ Kilogr.},$$

also für $z = 1000^m$, $P = 1010332$ Kilogr. Mit Berücksichtigung der Zusammendrückbarkeit wird er um $\frac{1}{2}\,\frac{\beta\, p_0\, z}{\mathbf{P}}\, p_0\, z = 0{,}002177\,..\, p_0\, z$

d. i. um etwa 2178 Kilogr. größer. Für kleinere Tiefen werden demnach die Unterschiede zwischen den Werthen (29) und (30) verschwindend klein; für größere aber kann die Annahme einer constanten Schwere nicht mehr zugelassen werden.

Sind mehrere tropfbar-flüssige Stoffe von verschiedener Dichte übereinandergelagert, und sind p_1, p_2, p_3, etc. die Gewichte der Volumeneinheit dieser Flüssigkeiten, h_1, h_2, h_3, etc. die Höhen der Schichten von oben herab genommen, so hat man in einer Tiefe $z_1 < h_1$ den Druck:

$$P = P_0 + p_1 z_1 \quad ;$$

in einer Tiefe $z_2 > h_1$, $< h_2$

$$\begin{aligned} P &= P_0 + p_1 h_1 + p_2 (z_2 - h_1) \\ &= P_0 + (p_1 - p_2) h_1 + p_1 z_2 \quad ; \end{aligned}$$

in einer Tiefe $z_3 > h_2$, $< h_3$

$$\begin{aligned} P &= P_0 + p_1 h_1 + p_2 h_2 + p_3 (z_3 - h_1 - h_2) \\ &= P_0 + (p_1 - p_3) h_1 + (p_2 - p_3) h_2 + p_3 z_3 \quad , \end{aligned}$$

u. s. f.

Wenn die Spiegelfläche einer tropfbaren Flüssigkeit getheilt ist, und auf den einen Theil der Druck $\mathbf{P}$, auf den andern der Druck P_0 ausgeübt wird, so hat man in einer Niveau-Ebene, welche beide Abtheilungen der Flüssigkeit schneidet und in einer Tiefe z unter der ersten, die xy-Ebene vorstellenden Spiegelfläche liegt, einen Druck:

$$P = \mathbf{P} + p z \quad ;$$

bezeichnet dann h den verticalen Abstand der zweiten Spiegelfläche von der ersten, so hat man auch in derselben Niveau-Ebene von der andern Seite den Druck:

$$P = P_0 + p (z - h)$$

und zieht daraus

$$h = \frac{P_0 - \mathbf{P}}{p} \quad .$$

Dieser Werth ist positiv, und die zweite Spiegelfläche liegt tiefer als die erste, wenn $P_0 > \mathbf{P}$; im entgegengesetzten Falle liegt sie höher. Für $P_0 = 0$ z. B. hat man

$$h = -\frac{\mathbf{P}}{p} \quad ;$$

wenn also auf die eine Spiegelfläche der atmosphärische Druck $\mathbf{P}$ ausgeübt wird, während über der zweiten Spiegelfläche dieser Druck weggenommen ist, wie in dem Barometer, so ist der vorstehende Werth von h die Höhendifferenz der beiden Spiegelflächen, die Barometerhöhe, und es ergibt sich daraus ohne Rücksicht auf das Zeichen von h der atmosphärische Druck:

$$\mathbf{P} = p\,h\ .$$

Befindet sich in einem getheilten Gefäß in einer Abtheilung über der Flüssigkeit von der Dichte q_1 eine zweite von der Dichte q_2 und der Höhe h_2, in der andern dagegen nur die erste Flüssigkeit, so daß diese die Verbindung zwischen beiden Abtheilungen herstellt, und wird auf die Spiegelflächen in beiden Abtheilungen derselbe Druck $\mathbf{P}$ ausgeübt, so hat man in einer Ebene, welche die Flüssigkeit von der Dichte q_1 in beiden Abtheilungen schneidet und in der Tiefe z unter der freien Spiegelfläche derselben liegt, einerseits den Druck:

$$P = \mathbf{P} + p_1 z$$

und anderseits wenn h_1 der Abstand der beiden Spiegelflächen dieser Flüssigkeit in beiden Abtheilungen ist, den Druck:

$$P = \mathbf{P} + p_2 h_2 + p_1 (z - h_1)\ ,$$

und man zieht daraus die Gleichung:

$$p_1 h_1 = p_2 h_2\ ,$$

welche ausspricht, daß der von beiden Flüssigkeiten auf deren Trennungs- oder Berührungs-Ebene ausgeübte Druck gleich ist, und daß die Abstände ihrer Spiegelflächen von dieser Ebene im umgekehrten Verhältniß zu ihren Dichten oder specifischen Gewichten stehen.

§. 12.

Bei der Berechnung des Druckes schwerer gasförmiger Flüssigkeiten wird gewöhnlich die durch das Mariotte'sche Gesetz ausgesprochene Eigenschaft als vollkommen richtig zugelassen, und man hat dann nach (14) mit dem in §. 10 erhaltenen Werthe der Function U die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} P &= P_0\, e^{\frac{g\,q_0\,(z-z_0)}{P_0}}\ , & q &= q_0\, e^{\frac{g\,q_0\,(z-z_0)}{P_0}}\ ,\\ &= P_0\, e^{\frac{p_0\,(z-z_0)}{P_0}}\ , & p &= p_0\, e^{\frac{p_0\,(z-z_0)}{P_0}}\ . \end{aligned}\right\}\ (31.$$

Für diese Flüssigkeiten ist aber das Verhältniß: $\frac{p_0}{P_0}$, welches übrigens nach dem obengenannten Gesetz auch durch ein anderes $\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{P}}$ ersetzt werden kann, wenn $\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{P}} = \frac{p_0}{P_0}$, meistens so klein, daß bei geringen Höheunterschieden oder kleinen Werthen von $z - z_0$ schon das zweite Glied in der Entwickelung der angezeigten Potenz von e neben 1 sehr klein wird oder von derselben Ordnung ist, wie die Abweichung der Gase von dem Mariotte'schen Gesetz, so daß man für die erste Annäherung bei Gasen, welche in einem Gefäße von beschränkter Ausdehnung eingeschlossen sind,

$$P = P_0 \quad , \quad q = q_0 \quad \text{oder} \quad p = p_0$$

nehmen kann.

Für die atmosphärische Luft z. B. hat man bei der Temperatur 0° und unter dem Normaldrucke: $P_0 = \mathbf{P} = 10332$ Kilogr. die Dichte $p_0 = \mathbf{p} = 1{,}299$, und damit ergibt sich bei derselben Temperatur

$$P = P_0 \, e^{\frac{1,299}{10332}(z - z_0)}$$
$$= P_0 \, [1 + 0{,}00012573\,(z - z_0) + \text{etc.}] \; .$$

In einem mit atmosphärischer Luft gefüllten Gefäße von 10 Meter Höhe ist demnach die Spannung und Dichte am Boden nur um etwa $\frac{1}{800}$ größer als an der Decke, und zwar ganz unabhängig davon, ob die Luft in demselben im Vergleich zur freien atmosphärischen Luft verdichtet oder verdünnt ist.

Bei sehr großen Höhen-Unterschieden, wie sie in der freien Atmosphäre vorkommen können, muß übrigens zur Erzielung einer entsprechenden Genauigkeit auch auf die Aenderung der Schwere Rücksicht genommen werden, worüber weiter unten das Nähere folgen wird.

Wenn in demselben Raum mehrere Gase von verschiedener Dichte übereinandergelagert sind, so gilt für diese dasselbe, was im vorhergehenden §. in Betreff mehrerer übereinandergelagerter tropfbar-flüssiger Stoffe bemerkt worden ist. Die Gase besitzen aber noch die besondere Eigenschaft, sich gegenseitig zu absorbiren und sich dadurch nach ziemlich kurzer Zeit ohne Rücksicht auf ihre Dichte vollständig zu mischen, so daß mehrere solche Gase von verschiedener Dichte, welche ursprünglich selbst im Zustande des stabilen Gleich-

gewichtes übereinandergelagert, d. h. von oben nach unten nach zunehmender Dichte geordnet waren, nach einiger Zeit ein vollkommen homogenes Gas bilden, wie in dem Falle, wo sich Gase oder tropfbar-flüssige Stoffe chemisch verbinden, mit dem Unterschiede jedoch, daß das Gasgemenge unter gleichem Druck denselben Raum einnimmt, wie die einzelnen Gase zusammen, während bei einer chemischen Verbindung immer eine Verdichtung oder eine Verminderung des ursprünglichen Volumens der verbundenen Gase erfolgt.

Das wichtigste Beispiel eines solchen Gasgemenges ist unsere atmosphärische Luft, welche aus vier Gasen von sehr verschiedener Dichte besteht, nämlich aus Sauerstoff-, Stickstoff-, kohlensaurem Gas und Wasserdampf. Von diesen 4 Gasen sind jedoch die beiden ersten weitaus die überwiegenden, indem das Stickstoffgas allein dem Raume nach fast 79 p%, das Sauerstoffgas 21 p% beträgt, während die Luft dem Gewichte nach an kohlensaurem Gas nur etwa 0,02 p%, an Wasserdampf höchstens bis 0,2 p% enthält. Das angegebene Verhältniß der beiden ersten Gase wurde an allen Orten der Erde und in sehr verschiedenen Höhen über derselben so nahe constant gefunden, als die Genauigkeit der Prüfungs-Methoden reicht, was offenbar daher rührt, daß die aus den organischen Processen an der Erdoberfläche hervorgehenden, aber im Verhältnisse zu dem großen Luftmeere sehr geringen und langsam vor sich gehenden Veränderungen im Sauerstoff- und Stickstoffgehalt der Luft bald ausgeglichen werden und auch durch das Experiment nicht sicher nachgewiesen werden können. Der Gehalt an kohlensaurem Gas und namentlich an Wasserdampf ist dagegen ziemlich beträchtlichen relativen Aenderungen unterworfen, was sich ebenfalls aus den organischen Processen, der fortwährenden Verdampfung des Wassers und den wieder durch Abkühlung erfolgenden Verdichtungen und Niederschlägen leicht erklären läßt. Wenn man aber einen mit Luft erfüllten Raum von der äußern Luft absperrt, so wird in diesem das Verhältniß der genannten vier Gase an allen Orten dasselbe sein und bleiben, wenigstens so lange die Temperatur nicht so niedrig wird, daß der darin enthaltene Wasserdampf das Maximum seiner Dichte erreicht und sich ein Theil desselben als Wasser niederschlägt.

Um nun Druck und Dichte oder geometrisches spezifisches Gewicht in einem solchen Gasgemenge nach dem ursprünglichen Zustande der einzelnen Gase zu bestimmen, und zwar unter der Voraussetzung, daß für jedes einzelne Gas des Gemenges das Mariotte'sche Gesetz zugelassen und daß vorerst die Aenderung des Druckes in verticaler Richtung vernachlässigt werden kann, denken wir uns zunächst zwei getrennte

Gefäße, welche zwei verschiedene Gase von gleicher Temperatur, aber von verschiedener Dichte und Spannung enthalten; in dem einen Gefäß, dessen Rauminhalt $= V'$ sei, besitze das Gas das specifische Gewicht p' und die Spannung P', in dem andern vom Rauminhalte V'' die Dichte p'' und die Spannung P''; für die Gewichtsmengen G' und G'' dieser Gase wird man darnach die Beziehungen haben:

$$G' = p'\, V' \quad , \qquad G'' = p''\, V'' \quad .$$

Werden nun beide Gefäße in Verbindung gesetzt, und ist nach vollständiger Mischung der Gase der Gleichgewichtszustand eingetreten, so wird das homogen gewordene Gemenge eine Dichte p besitzen, so daß man hat

$$G' + G'' = p\,(V' + V'') = p'\, V' + p''\, V'' \quad ,$$

oder

a.) $$p = p' \frac{V'}{V' + V''} + p'' \frac{V''}{V' + V''} \quad .$$

Diese Dichte (beziehungsweise dieses specifische Gewicht) *ist demnach gleich der Summe der Dichtigkeiten, welche die beiden Gase besitzen würden, wenn jedes sich allein in den Raum* $V' + V''$ *beider Gefäße ausgedehnt hätte.*

Denkt man sich dann jedes der beiden Gase einzeln und ohne Aenderung der Temperatur in einen solchen Raum zusammengepreßt oder ausgedehnt, bis sie die Normal-Spannung $\mathbf{P}$ erhalten haben, und die Dichte des einen $\mathbf{p}'$, die des andern $\mathbf{p}''$ geworden ist, und bezeichnet den entsprechenden Raum für das eine Gas mit $\mathbf{V}'$, für das andere mit $\mathbf{V}''$, so hat man einmal die Gleichungen:

$$p'\, V' = \mathbf{p}'\, \mathbf{V}' \quad , \qquad p''\, V'' = \mathbf{p}''\, \mathbf{V}'' \quad ,$$

dann auch nach dem *Mariotte*'schen Gesetze

$$\frac{p'}{\mathbf{p}'} = \frac{P'}{\mathbf{P}} \quad , \qquad \frac{p''}{\mathbf{p}''} = \frac{P''}{\mathbf{P}} \quad ,$$

und damit die Werthe:

$$\mathbf{V}' = \frac{p'}{\mathbf{p}'}\, V' = \frac{P'}{\mathbf{P}}\, V' \quad , \qquad \mathbf{V}'' = \frac{p''\, V''}{\mathbf{p}''} = \frac{P''\, V''}{\mathbf{P}} \quad .$$

Werden dann die beiden Gase in diesem Zustande wieder in Verbin-

dung gesetzt, so wird nach erfolgter Mengung die Dichte $\mathfrak{p}$ des Gemenges ähnlich wie vorher zuerst durch

$$\mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{p}'V' + \mathfrak{p}''V''}{V' + V''} \qquad (b.$$

und dann mit den vorhergehenden Werthen durch

$$\mathfrak{p} = \frac{p'V' + p''V''}{V' + V''} = \mathfrak{P}\,\frac{p'V' + p''V''}{P'V' + P''V''}$$

ausgedrückt werden; die Spannung aber, welche in beiden Gefäßen dieselbe war, muß offenbar auch nach der Verbindung dieser Gefäße dieselbe bleiben, wenn die Gase nicht chemisch aufeinander wirken, sich nicht chemisch verbinden, also kein neues Gas darstellen, dessen Dichte bei gleichem Drucke eine ganz andere ist, als die des Gemenges; es wird demnach $\mathfrak{p}$ die dem Normaldruck $\mathfrak{P}$ entsprechende Dichte des Gemenges sein, und man wird für die der früheren Dichte p desselben entsprechende Spannung P die Beziehung

$$P = \mathfrak{P}\,\frac{p}{\mathfrak{p}}$$

haben, welche mit dem vorhergehenden Werthe von $\mathfrak{p}$ und dem Werthe (a) von p die Form

$$P = \frac{P'V' + P''V''}{V' + V''} \qquad (c.$$

annimmt und so den Satz ausspricht, daß auch die Spannung des Gemenges der Summe der Spannungen gleich ist, welche die beiden Gase besitzen würden, wenn jedes sich allein in den Raum $V' + V''$ ausgedehnt hätte.

Die beiden Sätze (a) und (c), von welchen der letztere immer als ein physikalischer Erfahrungssatz hingestellt wird, während er, wie im Vorhergehenden gezeigt wurde, eine nothwendige Folge des Mariotte'schen Gesetzes ist, sind indessen nur annähernd richtig, nämlich nur so weit, als man den Druck in der ganzen Ausdehnung der Gefäße als constant oder die Gase als gewichtlos annehmen kann.*) Wir

*) Es ist daher gänzlich unrichtig, wenn Duhamel in seiner Traité de mécanique, II, §. 158, den letzteren Satz, welcher durch die Erfahrung nur für Gasgemenge in Gefäßen von sehr beschränkter Ausdehnung bestätigt ist, auch auf Gasgemenge, welche sich zu sehr bedeutenden Höhen erstrecken, anwendet und

wollen daher dieselbe Untersuchung nun mit Berücksichtigung der aus dem Gewicht der Gase entspringenden Aenderung der Spannung vornehmen. Dazu seien p_0' und p_0'', P_0' und P_0'' die specifischen Dichtigkeiten und die Spannungen der beiden Gase in einer beliebigen horizontalen Ebene, welche als Ebene der x y genommen werden soll, und welche entweder beide Gefäße schneiden oder bis zu welcher man sich die Gefäße anfänglich ausgedehnt denken und diese dann erst beliebig begrenzt annehmen kann. Man hat dann in einer beliebigen Niveau-Ebene, deren verticaler Abstand von der x y-Ebene z ist, die specifischen Gewichte

$$p' = p_0' \, e^{\frac{p' z}{P}} \quad , \qquad p'' = p_0'' \, e^{\frac{p'' z}{P}} \quad ,$$

und die beiden Gewichte G' und G'' der begrenzten Gasmengen sind nun

$$G' = p_0' \int_{h_0'}^{h'} dz \int_{x_0'}^{x_1'} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \, . \, e^{\frac{p' z}{P}} \quad , \qquad G'' = p_0'' \int_{h_0''}^{h''} dz \int_{x_0''}^{x_1''} dx \int_{y_0''}^{y_1''} dy \, . \, e^{\frac{p'' z}{P}} \quad ,$$

oder mit der Beachtung, daß die Integrale: $\int_{x_0'}^{x_1'} dx \int_{y_0'}^{y_1'} dy \, . \, 1$ und $\int_{x_0''}^{x_1''} dx \int_{y_0''}^{y_1''} dy \, . \, 1$ die Flächen der horizontalen Querschnitte der beiden Gefäße in Function von z ausdrücken und daher mit Z' und Z'' bezeichnet werden können,

$$G' = p_0' \int_{h_0'}^{h'} dz \, . \, Z' \, e^{\frac{p' z}{P}} \quad , \qquad G'' = p_0'' \int_{h_0''}^{h''} dz \, . \, Z'' \, e^{\frac{p'' z}{P}} \quad .$$

Werden nun wieder beide Gefäße in Verbindung gesetzt, so wird das

dadurch zu dem Schluß kommt, daß die Gase nicht in jeder Höhe in demselben Verhältniß gemischt sein können. Das durch die Erfahrung nachgewiesene constante Mengungsverhältniß der atmosphärischen Luft bei sehr großen Höhenunterschieden hat offenbar ein größeres Gewicht, als der durch die Gleichung (c) ausgesprochene Satz, und es muß aus jener Erfahrung geschlossen werden, daß es eine wesentliche Eigenschaft der nicht chemisch aufeinander wirkenden Gase ist, unter allen Umständen ein homogenes Gemenge zu bilden, so daß die Beziehungen für Druck und Dichte in einem solchen Gemenge dieselben sind, wie bei einem einfachen Gase, und daß daher für ein Gemenge schwerer Gase und die Annahme einer constanten Schwere die Beziehungen (31) unverändert bestehen bleiben.

Gasgemenge, wenn es homogen geworden ist,*) in der xy-Ebene eine Dichte p_0, in dem Abstand z von derselben die Dichte p und die Spannung P und unter dem Normaldrucke $\mathbf{P}$ eine Dichte $\mathbf{p}$ besitzen, so daß man wieder die Beziehungen hat:

$$p = p_0 \, e^{\frac{\mathbf{p} z}{\mathbf{P}}} \;, \qquad P = P_0 \, e^{\frac{\mathbf{p} z}{\mathbf{P}}} \;, \qquad (32.$$

und damit folgt

$$G' + G'' = p_0 \int_{h_0'}^{h'} dz \, . \, Z' \, e^{\frac{\mathbf{p} z}{\mathbf{P}}} + p_0 \int_{h_0''}^{h''} dz \, . \, Z'' \, e^{\frac{\mathbf{p} z}{\mathbf{P}}} \;,$$

und

$$p_0 = \frac{p_0' \int_{h_0'}^{h'} dz \, . \, Z' \, e^{\frac{\mathbf{p}' z}{\mathbf{P}}} + p_0'' \int_{h_0''}^{h''} dz \, . \, Z'' \, e^{\frac{\mathbf{p}'' z}{\mathbf{P}}}}{\int_{h_0'}^{h'} dz \, . \, Z' \, e^{\frac{\mathbf{p} z}{\mathbf{P}}} + \int_{h_0''}^{h''} dz \, . \, Z'' \, e^{\frac{\mathbf{p} z}{\mathbf{P}}}} \;. \qquad (33.$$

Dieser Werth hängt offenbar von der Form der beiden Gefäße ab und läßt sich im Allgemeinen nicht mehr auf die Form der Gleichung (a) zurückführen. Nehmen wir z. B. beide Gefäße als senkrechte und durch horizontale Ebenen begrenzte Prismen oder Cylinder mit constanten Querschnitten O' und O'' an, so kann der Ausdruck (33) die Form erhalten:

$$\frac{p_0}{\mathbf{p}} \left[O' \left(e^{\frac{\mathbf{p} h'}{\mathbf{P}}} - e^{\frac{\mathbf{p} h_0'}{\mathbf{P}}} \right) + O'' \left(e^{\frac{\mathbf{p} h''}{\mathbf{P}}} - e^{\frac{\mathbf{p} h_0''}{\mathbf{P}}} \right) \right]$$

$$= \frac{p_0'}{\mathbf{p}'} \, O' \left(e^{\frac{\mathbf{p}' h'}{\mathbf{P}}} - e^{\frac{\mathbf{p}' h_0'}{\mathbf{P}}} \right) + \frac{p_0''}{\mathbf{p}''} \, O'' \left(e^{\frac{\mathbf{p}'' h''}{\mathbf{P}}} - e^{\frac{\mathbf{p}'' h_0''}{\mathbf{P}}} \right),$$

*) Homogen ist hier wie bei einfachen und chemisch verbundenen Gasen so zu verstehen, daß zwei Gewichtseinheiten des Gemenges, in verschiedenen Höhen genommen, gegenseitig vertauscht werden können, ohne das Gleichgewicht zu stören.

und wenn wir uns dann noch mit der Annäherung $e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2$ begnügen,*) die Rauminhalte $O'(h' - h_0')$ und $O''(h'' - h_0'')$ der Gefäße durch V' und V'', die Abstände $\frac{1}{2}(h' + h_0')$ und $\frac{1}{2}(h'' + h_0'')$ ihrer mittleren Querschnitte von der xy=Ebene durch H' und H'' ersetzen, so ergibt sich daraus

$$p_0 = \frac{p_0' V' (\mathfrak{P} + \mathfrak{p}' H') + p_0'' V'' (\mathfrak{P} + \mathfrak{p}'' H'')}{V' (\mathfrak{P} + \mathfrak{p} H') + V'' (\mathfrak{P} + \mathfrak{p} H'')} .$$

Denkt man sich dann die Gase einen Augenblick gewichtlos und bezeichnet mit $\overset{\frown}{p}'$, $\overset{\frown}{p}''$ die specifischen Dichtigkeiten der beiden Gase vor ihrer Verbindung und mit $\overset{\frown}{p}$ die ihres Gemenges, ebenso mit $\overset{\frown}{P}'$, $\overset{\frown}{P}''$ und $\overset{\frown}{P}$ ihre entsprechenden Spannungen, so muß man haben

$$\text{d.)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \overset{\frown}{p}' \int_{h_0'}^{h'} dz \,.\, Z' = \overset{\frown}{p}' V' = p_0' \int_{h_0'}^{h'} dz \,.\, Z' \, e^{\frac{\mathfrak{p}' z}{\mathfrak{P}}} , \\ & \overset{\frown}{p}'' \int_{h_0''}^{h''} dz \,.\, Z'' = \overset{\frown}{p}'' V'' = p_0'' \int_{h_0''}^{h''} dz \,.\, Z'' \, e^{\frac{\mathfrak{p}'' z}{\mathfrak{P}}} , \\ & \overset{\frown}{p} (V' + V'') = p_0 \left(\int_{h_0'}^{h'} dz \,.\, Z' \, e^{\frac{\mathfrak{p} z}{\mathfrak{P}}} + \int_{h_0''}^{h''} dz \,.\, Z'' \, e^{\frac{\mathfrak{p} z}{\mathfrak{P}}} \right) \end{aligned} \right.$$

und nach (a)

$$\overset{\frown}{p} = \frac{\overset{\frown}{p}' V' + \overset{\frown}{p}'' V''}{V' + V''} ,$$

woraus sich für p_0 wieder der Werth (32) ergibt. Wir haben ferner

$$\text{e.)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{p_0'}{P_0'} = \frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{P}} = \frac{\overset{\frown}{p}'}{\overset{\frown}{P}'} , \quad \frac{p_0''}{P_0''} = \frac{\mathfrak{p}''}{\mathfrak{P}} = \frac{\overset{\frown}{p}''}{\overset{\frown}{P}''} ; \\ & \frac{p_0}{P_0} = \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{P}} = \frac{\overset{\frown}{p}}{\overset{\frown}{P}} , \end{aligned} \right.$$

*) Die Annäherung $e^x = 1 + x$ in dem integrirten Ausdruck wäre gleichbedeutend mit dem Werthe $e^x = 1$ in dem unausgeführten Integral und würde für jede Form der Gefäße von dem Ausdruck (33) direct auf die Gleichung (a) zurückführen.

und nach (c)

$$\hat{P} = \frac{\hat{P}' V' + \hat{P}'' V''}{V' + V''} ,$$

und damit ergibt sich aus den vorhergehenden Gleichungen (d) nach und nach

$$\hat{P}' V' = P_0' \int_{h_0'}^{h'} dz \,.\, Z' \, e^{\frac{p' z}{P}} , \quad \hat{P}'' V'' = P_0'' \int_{h_0''}^{h''} dz \,.\, Z'' \, e^{\frac{p'' z}{P}} ,$$

$$\hat{P} (V' + V'') = P_0 \left(\int_{h_0'}^{h'} dz \,.\, Z' \, e^{\frac{p z}{P}} + \int_{h_0''}^{h''} dz \,.\, Z'' \, e^{\frac{p z}{P}} \right) ,$$

und

$$P_0 = \frac{P_0' \int_{h_0'}^{h'} dz \,.\, Z' \, e^{\frac{p' z}{P}} + P_0'' \int_{h_0''}^{h''} dz \,.\, Z'' \, e^{\frac{p'' z}{P}}}{\int_{h_0'}^{h'} dz \,.\, Z' \, e^{\frac{p z}{P}} + \int_{h_0''}^{h''} dz \,.\, Z'' \, e^{\frac{p z}{P}}} , \qquad (34.$$

von denen der letzte Ausdruck die der Gleichung (c) entsprechende allgemeine Beziehung ausdrückt.

Endlich folgt aus (33) mit den Beziehungen (e) der Werth:

$$P_0 = \frac{P_0' \, p' \int_{h_0'}^{h'} dz \,.\, Z' \, e^{\frac{p' z}{P}} + P_0'' \, p'' \int_{h_0''}^{h''} dz \,.\, Z'' \, e^{\frac{p'' z}{P}}}{p \left(\int_{h_0'}^{h'} dz \,.\, Z' \, e^{\frac{p z}{P}} + \int_{h_0''}^{h''} dz \,.\, Z'' \, e^{\frac{p z}{P}} \right)} ,$$

und dieser führt mit dem vorhergehenden verglichen auf die Gleichung:

$$35.)\quad \mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{p}'\,P_0'\int_{h_0'}^{h'} dz\,.\,Z'\,e^{\frac{p'z}{P}} + \mathfrak{p}''\,P_0''\int_{h_0''}^{h''} dz\,.\,Z''\,e^{\frac{p''z}{P}}}{P_0'\int_{h_0'}^{h'} dz\,.\,Z'\,e^{\frac{p'z}{P}} + P_0''\int_{h_0''}^{h''} dz\,.\,Z''\,e^{\frac{p''z}{P}}},$$

welche den zur Berechnung von p_0 und P_0 nothwendigen Werth der Dichte $\mathfrak{p}$ des Gemenges bei dem Normaldruck $\mathbf{P}$ gibt und dem frühern Werthe (b) für gewichtlose Gase entspricht.

Die Gleichungen (33) bis (35), welche sich nur auf ein Gemenge von zwei Gasen beziehen, lassen sich nun leicht auf ein solches aus mehreren Gasen ausdehnen, weßhalb ich nicht weiter darauf eingehen will, und die Gleichungen (32) sind ohnehin für ein jedes homogen gewordenes Gemenge von Gasen gültig, das sich im Zustande des Gleichgewichtes befindet.

§. 13.

Der geometrische Druck P in einem beliebigen Punkte einer schweren homogenen Flüssigkeit kann nach dem Vorhergehenden bei nicht bedeutender Ausdehnung derselben durch die Gleichung:

$$P = P_0 + p z$$

vorgestellt werden, wenn man für die Gase $p = 0$ setzt, und für tropfbarflüssige Stoffe die Spiegelfläche als Ebene der xy annimmt, unter P_0 also den auf die Spiegelfläche ausgeübten geometrischen Druck versteht. Um daher den von einer solchen Flüssigkeit auf einen begrenzten Theil der Gefäßwand, deren Gleichung in der Form $z = F(x, y)$ gegeben sei, ausgeübten physischen Druck zu berechnen, hat man in die Gleichungen (16) bis (26) den vorstehenden Werth von P einzusetzen und diese dann mit Rücksicht auf die Form der Wand und die Begrenzung derselben zu integriren. Diese Integrale zerfallen aber dadurch zunächst in zwei Theile, in ein Integral mit der Constanten P_0 und eines mit dem veränderlichen Factor $p z$, was damit zusammenhängt, daß sich auch die Componenten des physischen Druckes aus je zwei Kräften zusammensetzen, von denen die eine von dem constanten geometrischen Drucke P_0 herrührt, die andere von dem aus dem Gewichte der Flüssig-

keit entspringenden p z. Wir wollen daher jede dieser Kräfte für sich betrachten.

Der constante geometrische Druck P_0, welcher für ein mit Gas gefülltes Gefäß den ganzen geometrischen Druck vorstellt, gibt, in die Gleichungen (17) eingeführt, die physischen Componenten:

(36.

$$\mathfrak{P}_x = P_0 \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{\chi_1(y)}^{\chi_2(y)} dz \, . \, 1 = P_0 O_3 \, , \quad \mathfrak{P}_y = P_0 \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dz \, . \, 1 = P_0 O_2 \, ,$$

$$\mathfrak{P}_z = P_0 \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \, . \, 1 = P_0 O_1 \, ,$$

und diese Werthe zeigen, daß jede der aus dem Drucke P_0 entspringenden physischen Componenten dem von demselben geometrischen Drucke auf die Projection des gedrückten Flächenstückes in einer zu ihrer Richtung senkrechten Ebene erzeugten physischen Drucke gleich ist, da die durch O_3, O_2 und O_1 ersetzten Integrale offenbar die Flächeninhalte der Projectionen des begrenzten Wandtheiles in den Ebenen der y z, x z und x y ausdrücken.

Ebenso wird man sich durch die Gleichungen (20), von denen z. B. die beiden ersten die Form:

$$\mathfrak{P}_x y_1 = P_0 \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{\chi_1(y)}^{\chi_2(y)} dz \, . \, y = P_0 O_3 \mathbf{Y}_3 \quad , \quad y_1 = \mathbf{Y}_3 \, ,$$

$$\mathfrak{P}_x z_1 = P_0 \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{\chi_1(y)}^{\chi_2(y)} dz \, . \, z = P_0 O_3 \mathbf{Z}_3 \quad , \quad z_1 = \mathbf{Z}_3$$

(37.

annehmen, leicht überzeugen, daß die Schwerpunkte der vorgenannten Projectionen die Richtungslinien der physischen Druckkräfte $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$, $\mathfrak{P}_z$ bestimmen, und daraus wird man weiter schließen, daß wenn das betreffende Wandstück von einer ebenen Curve begrenzt wird, die Richtungen dieser drei Kräfte sich im Flächen-Schwerpunkt dieser Curve schneiden werden, und daß demnach diese drei Kräfte durch eine einzige Kraft $\mathfrak{P}$ ersetzt werden können, deren Größe durch

$$P_0 \sqrt{O_3^2 + O_2^2 + O_1^2} = P_0 \mathbf{O}$$

$$35.)\quad p = \frac{p'\,P_0' \int_{h_0'}^{h'} dz\,.\,Z'}{P_0' \int_{h}^{h'} dz}$$

e Fläche O d

ung im S

ichun

welche den zur Ver

Dichte p des Gem

Werthe (b) für

$$\int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\psi_1(x)} dz\,.$$

Die Glei

von zwei G

mehreren G

will, un

geworde

Gleich

$$- p \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\,.\,F(x,\,y) = p\,V_1\,,$$

o O_2 wieder die Flächeninhalte der Projectionen der urve in den Ebenen der yz und xz, Z_3 und Z_2 die ihrer Flächen-Schwerpunkte von der xy-Ebene bezeichnen, V_1 das Volumen des von der xy-Ebene begrenzten, über dem gedrückten Wandstücke stehenden verticalen Cylinders ist, und aus welchen man demnach schließt, daß jede der horizontalen Componenten P_x und P_y dem Druck gleich ist, welchen die Flüssigkeit auf die Projection der Begrenzungscurve in der normalen Coordinaten-Ebene ausübt, und daß daher jede von ihnen durch das Gewicht einer prismatischen Flüssigkeitssäule gemessen wird, welche die Fläche dieser Projection zur Basis und den Abstand ihres Schwerpunktes vom Spiegel der Flüssigkeit zur Höhe hat, daß dagegen die verticale Componente P_z dem Gewicht der über dem gedrückten Wandstücke selbst stehenden und bis zum Spiegel reichenden verticalen Flüssigkeitssäule gleich ist.

Der durch die Werthe (38) von P_x und P_y ausgesprochene Satz, daß der Druck eines schweren tropfbar-flüssigen Stoffes auf einen begrenzten Theil einer verticalen Ebene durch das Gewicht einer prismatischen Säule dieser Flüssigkeit gemessen wird, welche die gedrückte Fläche zur Basis und den Abstand ihres Schwerpunktes vom Spiegel der Flüssigkeit zur Höhe hat, gilt übrigens nicht nur für verticale Ebenen, sondern überhaupt für jedes ebene Wandstück, wie es auch liegen mag. Denn sind λ, μ, ν die Winkel der Normalen dieser Ebene mit den drei

...ssen, $\mathfrak{O}$ die ... Prisma senkrecht zu YAZ
... Ebenen der ... er entsprechenden Flüssig=
... ck $\mathfrak{P}_x$ auf das Dreieck
... vor, und die Schwer=
... ung dieses Druckes;
... ebene, auf XAZ
... uf seine Basis
... dieses Druckes,
$\mathfrak{Z} =$ ... nur in einer
... nen der über $\mathfrak{O}$ stehen... ... aulich ge=

... mm=
... eine
...

$$V = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \,.\, z = O_1 \mathfrak{Z} \;;$$

folglich wird

$$\mathfrak{P}_x = p\, O_3 \mathfrak{Z}_3 = p\, \mathfrak{O} \mathfrak{Z} \cos\lambda \;, \quad \mathfrak{P}_y = p\, O_2 \mathfrak{Z}_2 = p\, \mathfrak{O} \mathfrak{Z} \cos\mu \;,$$
$$\mathfrak{P}_z = p\, O_1 \mathfrak{Z} = p\, \mathfrak{O} \mathfrak{Z} \cos\nu \;,$$

und damit folgt der Ausdruck:

$$\mathfrak{P} = \sqrt{\mathfrak{P}_x^2 + \mathfrak{P}_y^2 + \mathfrak{P}_z^2} = p\, \mathfrak{O} \mathfrak{Z} \;,$$

durch welchen die oben ausgesprochene Behauptung bestätigt wird.

Die Gleichungen (20) nehmen für den geometrischen Druck:

$$P = p z$$

zunächst die Form an:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{P}_x y_1 &= p \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{\chi_1(y)}^{\chi_2(y)} dz \,.\, yz \;, & \mathfrak{P}_x z_1 &= p \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{\chi_1(y)}^{\chi_2(y)} dz \,.\, z^2 \;, \\
\mathfrak{P}_y x_2 &= p \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dz \,.\, xz \;, & \mathfrak{P}_y z_2 &= p \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dz \,.\, z^2 \;, \\
\mathfrak{P}_z x_3 &= p \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \,.\, xz \;, & \mathfrak{P}_z y_3 &= p \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \,.\, yz \;;
\end{aligned}\right\} (39^a.$$

wenn man dann das Integral:

$$\int_{b_1}^{b_2} dy \int_{\chi_1(y)}^{\chi_2(y)} dz \,.\, z = O_3 \mathfrak{Z}_3 = V_3$$

als das Volumen eines auf der yz=Ebene senkrecht stehenden Cylinders betrachtet, welcher von dieser Ebene und von einer zweiten, unter einem Winkel $= \frac{1}{4}\pi$ gegen dieselbe geneigten Ebene, deren Gleichung: $x = z$ ist, begrenzt wird, ebenso das Integral:

$$\int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dz \,.\, z = O_2 \mathfrak{Z}_2 = V_2$$

als das Volumen eines zur xz=Ebene senkrechten Cylinders, welcher von dieser Ebene und einer Ebene: $y - z = 0$ begrenzt wird, und wenn man die Coordinaten der Schwerpunkte dieser Cylinder mit $\widehat{\mathfrak{X}}_3$, $\widehat{\mathfrak{Y}}_3$, $\widehat{\mathfrak{Z}}_3$ und $\widehat{\mathfrak{X}}_2$, $\widehat{\mathfrak{Y}}_2$, $\widehat{\mathfrak{Z}}_2$, ebenso die des mit V_1 bezeichneten Raumes mit $\widehat{\mathfrak{X}}_1$, $\widehat{\mathfrak{Y}}_1$, $\widehat{\mathfrak{Z}}_1$ bezeichnet, so hat man einfach

$$39^b.)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}_x = p V_3 \;, & \mathfrak{P}_y = p V_2 \;, \quad \mathfrak{P}_z = p V_1 \;, \\ \mathfrak{P}_x y_1 = p V_3 \widehat{\mathfrak{Y}}_3 \,, & \mathfrak{P}_x z_1 = p V_3 \widehat{\mathfrak{Z}}_3 \,, \quad y_1 = \widehat{\mathfrak{Y}}_3 \,, \quad z_1 = \widehat{\mathfrak{Z}}_3 \,, \\ \mathfrak{P}_y x_2 = p V_2 \widehat{\mathfrak{X}}_2 \,, & \mathfrak{P}_y z_2 = p V_2 \widehat{\mathfrak{Z}}_2 \,, \quad x_2 = \widehat{\mathfrak{X}}_2 \,, \quad z_2 = \widehat{\mathfrak{Z}}_2 \,, \\ \mathfrak{P}_z x_3 = p V_1 \widehat{\mathfrak{X}}_1 \,, & \mathfrak{P}_z y_3 = p V_1 \widehat{\mathfrak{Y}}_1 \,, \quad x_3 = \widehat{\mathfrak{X}}_1 \,, \quad y_3 = \widehat{\mathfrak{Y}}_1 \,, \end{cases}$$

und schließt daraus, daß die Richtungen der als allgemeine Resultirende paralleler Kräfte genommenen Componenten $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$, $\mathfrak{P}_z$ durch die Schwerpunkte der vorgenannten Cylinder=Räume gehen und zur Erzeugenden der begrenzenden Cylinderflächen parallel, also die **Schwer=Achsen** dieser Cylinder sind.

Dieser Betrachtung gemäß läßt sich der Druck einer schweren tropfbaren Flüssigkeit auch sehr einfach anschaulich darstellen. Sind nämlich Fig. 2, XAY, XAZ und YAZ die drei Coordinaten=Ebenen, von denen die erste zugleich den Spiegel der Flüssigkeit vorstellt, und die beiden letzten als verticale Wände gedacht werden können, und macht man $ZA_1 = ZA_2 = ZA$, ZA_1 parallel zu AX, ZA_2 parallel zu AY und vollendet damit die dreiseitigen rechtwinkligen Prismen AZA_1Y,

AZA_2X, so stellt der aus dem ersten Prisma senkrecht zu YAZ ausgestochene Körper $a_3\,b_3\,c_3\,a_3'\,b_3'\,c_3'$, mit der entsprechenden Flüssigkeit gefüllt gedacht, durch sein Gewicht den Druck $\mathfrak{P}_x$ auf das Dreieck $a_3\,b_3\,c_3$ in der ebenen verticalen Wand YAZ vor, und die Schwer-Achse $h_3\,h_3'$, der Länge nach $= \mathfrak{z}_3$, gibt die Richtung dieses Druckes; ebenso stellt der aus dem Prisma AZA_2X ausgestochene, auf XAZ senkrechte Körper $a_2\,b_2\,c_2\,a_2'\,b_2'\,c_2'$ den Druck $\mathfrak{P}_y$ auf seine Basis $a_2\,b_2\,c_2$ vor, und seine Achse $h_2\,h_2' = \mathfrak{z}_2$ die Richtung dieses Druckes, und in ähnlicher Weise kann der Druck auf irgend eine Figur in einer verticalen ebenen Wand der Größe und Richtung nach anschaulich gemacht werden.

Ist dann ferner $a\,b\,c$ ein auf einer krummen Wandfläche bestimmtes krummliniges Dreieck, und sind $a_1\,b_1\,c_1$, $a_2\,b_2\,c_2$, $a_3\,b_3\,c_3$ seine Projectionen in den Ebenen der $x\,y$, $x\,z$ und $y\,z$, so werden die vorhergenannten Körper mit ihren Achsen die Größe und Richtung der horizontalen physischen Componenten $\mathfrak{P}_x$ und $\mathfrak{P}_y$ des auf das Dreieck $a\,b\,c$ ausgeübten Druckes vorstellen; die verticale Componente $\mathfrak{P}_z$ dagegen wird der Größe und Richtung nach durch den auf $a\,b\,c$ selbst stehenden Körper $a\,b\,c\,a_1\,b_1\,c_1$ und dessen Achse $h\,h_1$ vorgestellt.

§. 14.

Es ist zwar schon an und für sich einleuchtend, daß wenn die gedrückte Fläche eine Ebene ist, der darauf ausgeübte Druck durch eine einzige allgemeine Resultirende $\mathfrak{P}$ dargestellt werden kann, weil alle geometrischen Kräfte P parallel und in gleichem Sinne gerichtet sind; es dürfte indessen doch nicht überflüssig sein, sich nach der vorhergehenden Betrachtung zu überzeugen, daß für diesen Fall die Bedingungen (22^a) erfüllt werden, daß nämlich die Schwer-Achsen der Körper V_3 und V_2 in derselben horizontalen, die der Körper V_3 und V_1, V_2 und V_1 je in derselben verticalen Ebene liegen und sich daher in einem auf der gedrückten Ebene selbst liegenden Punkte schneiden, welcher hier zugleich den Mittelpunkt des Druckes vorstellt. Um sich davon zu überzeugen, daß sich die Achsen je zwei schneiden, darf man nur beachten, daß die beiden Körper V_3 und V_2 zwischen denselben horizontalen Ebenen liegen, und daß jeder horizontale Schnitt in denselben zwei Rechtecke erzeugt, deren Länge gleich ist und deren Breiten in einem constanten Verhältnisse stehen, daß ferner die Körper V_3 und V_1 zwischen denselben verticalen Ebenen liegen und jeder verticale Schnitt in denselben zwei Trapeze erzeugt, deren parallele Seiten einzeln gleich

sind, und worin die Abstände dieser Seiten in einem constanten Verhältnisse stehen, daß also die Körper V_3 und V_2 durch jeden horizontalen Schnitt, die Körper V_3 und V_1 durch jeden verticalen Schnitt je nach demselben Verhältnisse getheilt werden, daß also auch die Schwerachsen der beiden ersten in derselben horizontalen, die der beiden letzten in derselben verticalen Schnittebene liegen müssen, und daß dasselbe von den beiden Körpern V_2 und V_1 gilt. Daß sich aber je zwei dieser Achsen auf der gedrückten Ebene schneiden müssen, geht daraus hervor, daß irgend zwei horizontale Gerade, welche durch entsprechende Punkte in den verticalen Projectionen der gedrückten ebenen Figur senkrecht zu diesen Projectionen gezogen werden, sich in dem entsprechenden Punkte der projicirten ebenen Figur schneiden müssen, und daß die Achsen der Körper V_3 und V_2 offenbar durch solche entsprechende Punkte ihrer Grundflächen gehen.

Um denselben Beweis auf analytischem Wege und zugleich möglichst allgemein zu führen, geht man am besten von den allgemeinen Gleichungen (16) aus, in welchen die Grenzen der Integrale für die drei Componenten dieselben bleiben. Ist dann

$$z \cos\gamma + y \cos\beta + x \cos\alpha = h$$

die Gleichung der gedrückten Ebene, so hat man

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma},$$

und damit ergibt sich allgemein für jede Function P, welche den geometrischen Druck in einem Punkte einer Flüssigkeit durch die Coordinaten dieses Punktes ausdrückt,

$$\mathfrak{P}_x = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \,.\, P, \quad \mathfrak{P}_y = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \,.\, P,$$

$$= \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathfrak{P}_z, \qquad = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathfrak{P}_z;$$

folglich hat man

$$\frac{\mathfrak{P}_x}{\cos\alpha} = \frac{\mathfrak{P}_y}{\cos\beta} = \frac{\mathfrak{P}_z}{\cos\gamma} = \mathfrak{P} = \sqrt{\mathfrak{P}_x^2 + \mathfrak{P}_y^2 + \mathfrak{P}_z^2}$$

oder in anderer Form

$$\mathfrak{P}_x = \mathfrak{P} \cos\alpha \quad , \qquad \mathfrak{P}_y = \mathfrak{P} \cos\beta \quad , \qquad \mathfrak{P}_z = \mathfrak{P} \cos\gamma \quad ,$$

wie zu erwarten war, da es für die gedrückte Ebene nur eine normale Richtung gibt, und der resultirende physische Druck $\mathfrak{P}$ normal zu der Ebene sein muß.

In gleicher Weise hat man ferner

$$\mathfrak{P}_x y_1 = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \,.\, Py \,, \quad \mathfrak{P}_y x_2 = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \,.\, Px \,,$$

$$= \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} \mathfrak{P}_z y_3 \quad , \qquad\qquad = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \mathfrak{P}_z x_3 \,,$$

$$\mathfrak{P}_x z_1 = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \,.\, Pz \,, \quad \mathfrak{P}_y z_2 = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \,.\, Pz \,,$$

und daraus folgen mit den vorhergehenden Werthen von $\mathfrak{P}_x$ und $\mathfrak{P}_y$ die Gleichungen (22[a]):

$$x_2 = x_3 = x \quad , \qquad y_1 = y_3 = y \quad , \qquad z_1 = z_2 = z \,.$$

Für eine ebene Figur schneiden sich demnach die Richtungen der physischen Componenten des Druckes immer in einem Punkt, welches auch die Function P sein mag, und dieser Punkt gehört auch immer der gedrückten Ebene an; denn ersetzt man in dem Ausdruck:

$$\frac{\mathfrak{P}_x}{\cos\alpha} z_1 = \frac{\mathfrak{P}_y}{\cos\beta} z_2 = \frac{\mathfrak{P}_z}{\cos\gamma} z = \frac{1}{\cos\gamma} \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \,.\, Pz$$

die Ordinate z unter den Integralzeichen durch ihren Werth aus der Gleichung der gedrückten Ebene:

$$z = \frac{h}{\cos\gamma} - \frac{x \cos\alpha}{\cos\gamma} - \frac{y \cos\beta}{\cos\gamma} \,,$$

so wird

$$\mathfrak{P}_z z = \frac{h}{\cos\gamma} \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \,.\, P - \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \,.\, Px - \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy . Py \,,$$

also mit Beachtung der vorhergehenden Ausdrücke

$$z \cos\gamma + y \cos\beta + x \cos\alpha = h \quad ;$$

es ist mithin der Punkt $x\,y\,z$ ein Punkt der gedrückten Ebene, und der betreffende Satz gilt nicht nur für den Druck einer schweren homogenen Flüssigkeit, sondern für jede Function P, was sich durch Anschauung nicht ebenso leicht erkennen läßt.

§. 15.

Nach den vorhergehenden Erörterungen kommt die Berechnung des Druckes einer schweren homogenen Flüssigkeit auf die Berechnung cylindrischer Räume und deren Schwer-Achsen zurück; ich werde mich daher auf wenige spezielle Beispiele beschränken und dabei von dem constanten Druck P_0 Umgang nehmen.

1) Die gedrückte Fläche sei ein bis zum Spiegel der Flüssigkeit reichendes Rechteck in einer verticalen ebenen Wand, und seine Seiten h und b seien vertical und horizontal gerichtet. Man hat dann, die Wand als yz-Ebene genommen,

$$O_3 = b\,h \quad , \quad \mathfrak{z}_3 = \frac{1}{2}\,h \quad , \quad \mathfrak{P}_x = \frac{1}{2}\,p\,b\,h^2 \quad ;$$

der Körper V_3 ist ein dreiseitiges Prisma, dessen dreiseitige Grundfläche $= \frac{1}{2}\,h^2$, dessen Höhe $= b$, dessen Volumen also wie vorher $= \frac{1}{2}\,b\,h^2$ ist; seine Schwerachse liegt $\frac{2}{3}\,h$ unter dem Spiegel der Flüssigkeit und in der Mitte der Höhe b, und damit ist auch der Mittelpunkt des Druckes bestimmt. Wird demnach dieses Rechteck um eine horizontale Achse drehbar gemacht, so wird dasselbe im Gleichgewicht bleiben, wenn diese Achse um $\frac{2}{3}\,h$ von dem Spiegel der Flüssigkeit entfernt ist.

2) Wenn das gedrückte Rechteck nicht bis zum Spiegel der Flüssigkeit reicht, und der Abstand seines Mittelpunktes vom Spiegel $= c$ und $> \frac{1}{2}\,h$ ist, so hat man

$$O_3 = b\,h \quad , \quad \mathfrak{z}_3 = c \quad , \quad \mathfrak{P}_x = p\,b\,h\,c \quad .$$

Der Körper V_3 ist ein vierseitiges Prisma, seine Grundfläche ein Trapez mit den parallelen Seiten: $c + \frac{1}{2}\,h$ und $c - \frac{1}{2}\,h$ und dem Abstande h, seine Höhe wieder $= b$; das Volumen desselben ist also $b\,h\,c$, und der Abstand seiner Schwerachse von dem obern Rande des Rechteckes wird nach §. 38 des zweiten Buches durch

$$\frac{1}{3}h \cdot \frac{2(c+\frac{1}{2}h)+c-\frac{1}{2}h}{2c} = \frac{1}{2}h + \frac{h^2}{12c}$$

ausgedrückt; diese Achse liegt also um $\frac{h^2}{12c}$ unter der Mitte des Rechtecks und um

$$c - \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h + \frac{h^2}{12c} = c + \frac{h^2}{12c}$$

unter der Spiegelfläche der Flüssigkeit.

3) Für ein Dreieck in der Ebene der xz, dessen Ecken durch die Coordinaten $x_1 z_1$, $x_2 z_2$, $x_3 z_3$ bestimmt sind, und dessen Oberfläche: $\frac{1}{2}[x_1(z_2-z_3)+x_2(z_3-z_1)+x_3(z_1-z_2)]$ mit O_2 bezeichnet sei, ist (II. Buch, §. 37)

$$\mathfrak{z}_2 = \frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)\ , \quad \mathfrak{P}_y = \frac{1}{3}p\,O_2(z_1+z_2+z_3) = p\,V_2\ .$$

Der Körper V_2 ist ein schiefabgeschnittenes dreiseitiges Prisma; zerlegt man dieses in drei Pyramiden: $\frac{1}{3}O_2 z_1$, $\frac{1}{3}O_2 z_2$ und $\frac{1}{3}O_2 z_3$, so hat man (§. 61, Buch II) für die Ordinaten der Schwerpunkte dieser drei Pyramiden die Werthe:

$$\frac{1}{4}(2z_1+z_2+z_3)\ , \quad \frac{1}{4}(z_1+2z_2+z_3)\ , \quad \frac{1}{4}(z_1+z_2+2z_3)$$

und damit die Gleichung:

$$V_2\,\widehat{\mathfrak{z}}_2 = \frac{1}{6}O_2(z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)\ ,$$

woraus

$$\widehat{\mathfrak{z}}_2 = \frac{1}{2}\,\frac{z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3}{z_1+z_2+z_3} = \mathfrak{z}_2$$

als Ordinate des Druck-Mittelpunktes folgt.

Die x-Ordinate dieses Punktes ergibt sich ebenso aus der Gleichung:

$$V_2\widehat{\mathfrak{x}}_2 = \frac{1}{12}O_2[z_1(2x_1+x_2+x_3)+z_2(x_1+2x_2+x_3)+z_3(x_1+x_2+2x_3)],$$

welche sich indessen wesentlich dadurch vereinfachen läßt, daß man die

yz-Ebene durch den Schwerpunkt des Dreieckes legt. Dadurch wird

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad ,$$

und man findet so

$$\hat{\mathfrak{x}}_2 = \frac{1}{4} \, \frac{x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3}{z_1 + z_2 + z_3} = \mathfrak{x}_2 \; .$$

Liegt ein Eck des Dreieckes in der Spiegelfläche der Flüssigkeit, so ist eine z-Ordinate z. B. $z_3 = 0$, und man hat etwas einfacher

$$O_2 = \frac{1}{2} [x_1 z_2 - x_2 z_1 + x_3 (z_1 - z_2)] \; , \quad \mathfrak{P}_y = \frac{1}{3} \, p \, O_2 (z_1 + z_2) \; ,$$

$$\mathfrak{z}_2 = \frac{1}{2} \, \frac{z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_1 z_2}{z_1 + z_2} \quad , \quad \mathfrak{x}_2 = \frac{1}{4} \, \frac{x_1 z_1 + x_2 z_2}{z_1 + z_2} \; .$$

Wird dann noch eine Seite zum Spiegel parallel, also $z_1 = z_2 = h$, so hat man, wie sich auch leicht direct ergibt,

$$O_2 = \frac{1}{2} h (x_1 - x_2) = \frac{1}{2} b h \; , \quad \mathfrak{P}_y = \frac{2}{3} p \, O_2 h = \frac{1}{3} p b h^2 \; ,$$

$$\mathfrak{z}_2 = \frac{3}{4} h \quad , \quad \mathfrak{x}_2 = \frac{1}{8} (x_1 + x_2) = - \frac{1}{8} x_3 \; .$$

4) Soll der Druck auf eine Kreisfläche vom Halbmesser r in der xz-Ebene bestimmt werden, deren Mittelpunkt um c Längeneinheiten unter dem Spiegel liegt, so hat man

$$O_2 = \pi r^2 \quad , \quad \mathfrak{P}_y = p c O_2 = \pi p c r^2 \; .$$

Die Richtung von $\mathfrak{P}_y$ und der Mittelpunkt des Druckes liegen offenbar in der durch den Mittelpunkt des Kreises gedachten yz-Ebene, und der Abstand $\mathfrak{z}_2$ derselben von der y-Achse wird durch das Integral:

$$\mathfrak{P}_y \, \mathfrak{z}_2 = p \int_{-r}^{r} dx \int_{c - \sqrt{r^2 - x^2}}^{c + \sqrt{r^2 - x^2}} dz \, . \, z^2$$

berechnet, aus welchem sich nach und nach

$$\mathfrak{P}_y z_2 = p\int_{-r}^{r} dx \,.\, \frac{1}{3}\left[\left(c+\sqrt{r^2-x^2}\right)^3 - \left(c-\sqrt{r^2-x^2}\right)^3\right]$$

$$= 2p\int_{-r}^{r} dx \,.\, c^2\sqrt{r^2-x^2} + \frac{2}{3}p\int_{-r}^{r} dx \,.\, \left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^3$$

$$= \pi p r^2\left(c^2 + \frac{1}{4}r^2\right),$$

und sonach

$$z_2 = c + \frac{r^2}{4c}$$

ergibt. Der Mittelpunkt des Druckes liegt sonach noch um $\frac{r^2}{4c}$ Längeneinheiten unter dem Mittelpunkt des Kreises, also um so weniger, je weiter dieser Mittelpunkt selbst vom Spiegel der Flüssigkeit entfernt ist.

Berührt der Kreis gerade den Spiegel, so wird $c=r$, und demnach

$$z_2 = r + \frac{1}{4}r\ ;$$

es ist also $\frac{1}{4}r$ der größte Abstand des Druck-Mittelpunktes vom Mittelpunkte des Kreises.

5) Nehmen wir nun die unter 2), 3) und 4) berechneten Figuren in einer Ebene an, deren Normale den Winkel ν mit der Verticalen bildet, so können wir die Ebene der xz senkrecht zu der gegebenen Ebene durch den Schwerpunkt der betreffenden Figur legen und haben dann für das Rechteck, dessen Mittelpunkt in der Entfernung c unter dem Spiegel liegt, den gleichen Druck wie vorher; denn es ist nun

$$\mathfrak{O} = bh\ , \quad \mathfrak{z} = c\ , \quad \mathfrak{P} = pbhc\ .$$

Ebenso bleibt für den Kreis, wenn wie vorher c der Abstand seines Mittelpunktes vom Spiegel ist,

$$\mathfrak{P} = \pi p c r^2\ .$$

Die Lage des Druck-Mittelpunktes dagegen ändert sich. Man hat für das Rechteck, dessen Projection in der yz-Ebene wieder ein Rechteck mit der Basis b und der Höhe $h \sin\nu$ ist,

$$O_3 = b\,h\,\sin\nu \quad , \quad \mathfrak{z}_3 = c \quad , \quad \mathfrak{P}_x = p\,b\,h\,c\,\sin\nu \quad ,$$

$$\mathfrak{\hat{z}}_3 = \mathfrak{z}_1 = c + \frac{h^2 \sin^2\nu}{12\,c} \quad ;$$

der Abstand des Druck-Mittelpunktes vom Schwerpunkt des Rechteckes in der geneigten Ebene selbst gemessen, ist daher

$$\frac{\mathfrak{z}_1 - c}{\sin\nu} = \frac{h^2}{12\,c} \sin\nu \quad ,$$

also um so kleiner, je kleiner ν ist, oder je mehr sich die Ebene der horizontalen Lage nähert; für diese letztere selbst ist der betreffende Abstand selbstverständlich Null.

Bei der Kreisfläche wird die Projection in der yz-Ebene eine Ellipse mit der horizontalen Halb-Achse r und der verticalen $r\sin\nu$, daher ist

$$O_3 = \pi\,r^2 \sin\nu \quad , \quad \mathfrak{z}_3 = c \quad , \quad \mathfrak{P}_x = \pi\,p\,r^2 \sin\nu$$

und, wie nach dem Vorhergehenden leicht zu finden ist,

$$\mathfrak{P}_x\,\mathfrak{z}_1 = p\int_{-r}^{r} dy \int_{c-\sin\nu\sqrt{r^2-y^2}}^{c+\sin\nu\sqrt{r^2-y^2}} dz \quad z^2 = \pi\,p\,r^2 \sin\nu\left(c^2 + \frac{1}{4}r^2\sin^2\nu\right),$$

$$\mathfrak{z}_1 = c + \frac{r^2 \sin^2\nu}{4\,c} \quad ;$$

es ist daher auch hier der Abstand des Druck-Mittelpunktes vom Kreis-Mittelpunkte in der Kreis-Ebene gemessen im Verhältnisse: $1 : \sin\nu$ kleiner als vorher in der verticalen Lage, da er wieder $= \frac{\mathfrak{z}_1 - c}{\sin\nu}$, also $= \frac{r^2}{4\,c} \sin\nu$ ist.

Diese beiden für das Rechteck und den Kreis hervorgegangenen Sätze über die Größe und den Mittelpunkt des Druckes gelten nach den Erörterungen im vorigen §. offenbar für alle ebene Figuren und lassen sich allgemeiner dahin aussprechen: **Wenn eine ebene Figur in einer verticalen Wand um eine horizontale Achse in ihrem Schwerpunkt gedreht wird, so bleibt der Druck der**

Flüssigkeit auf dieselbe unverändert, und der Mittelpunkt des Druckes bewegt sich in einem Halbkreise, dessen Durchmesser dem größten Abstande des Schwerpunktes und Druck=Mittelpunktes, d. i. dem Abstande dieser Punkte bei verticaler Lage der Figur gleich ist, oder so daß der Druck=Mittelpunkt bei nicht verticaler Lage immer als die Projection des in der verticalen Wand bestimmten Mittelpunktes auf die geneigte Ebene erscheint.

Um diesen Satz allgemein zu beweisen, sei c der unveränderliche verticale Abstand des Schwerpunktes der gedrückten Figur vom Spiegel der Flüssigkeit; eine durch diesen Punkt gezogene horizontale Gerade wird die Begrenzung derselben in zwei Theile theilen, deren Gleichungen bei verticaler Lage derselben in der Form:

$$z_1 = c - \chi_1(y) \quad , \quad z_2 = c + \chi_2(y)$$

bestimmt seien. Man hat daher in dieser Lage

$$\mathfrak{P}_x = \mathfrak{P} = p\int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c-\chi_1(y)}^{c+\chi_2(y)} dz \;.\; z = \frac{1}{2}p\int_{b_1}^{b_2} dy\,[(c+\chi_2(y))^2 - (c-\chi_1(y))^2]$$

und mit der Beachtung, daß die Achse, von welcher die $\chi_2(y)$ und $\chi_1(y)$ gemessen werden, Schwerpunktsachse ist, daß also

$$\int_{b_1}^{b_2} dy\,[(\chi_2(y))^2 - (\chi_1(y))^2] = 0$$

sein muß, ergibt sich

$$\mathfrak{P}_x = pc\int_{b_1}^{b_2} dy\,[\chi_2(y) + \chi_1(y)] = pcO \;;$$

ebenso wird dann

$$\mathfrak{P}_x z_1 = p\int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c-\chi_1(y)}^{c+\chi_2(y)} dz \;.\; z^2 = \frac{1}{3}p\int_{b_1}^{b_2} dy\,[(c+\chi_2(y))^3 - (c-\chi_1(y))^3]$$

$$= pc^2\int_{b_1}^{b_2} dy\,[\chi_2(y) + \chi_1(y)] + \frac{1}{3}p\int_{b_1}^{b_2} dy\,[(\chi_2(y))^3 + (\chi_1(y))^3]$$

und man zieht daraus den Werth:

$$z_1 = c + \frac{\int_{b_1}^{b_2} dy\,[(\chi_2(y))^3 + (\chi_1(y))^3]}{3\,O\,c},$$

welcher nebenbei zeigt, daß z_1 immer größer als c sein muß.

Dreht man nun die Figur um den Winkel $\frac{1}{2}\pi - \nu$ um ihre Schwerpunktsachse, so verkürzen sich alle verticalen Ordinaten ihrer Projection in der yz=Ebene im Verhältnisse: $1 : \sin\nu$, und die Gleichungen der von der Schwerpunktsachse ausgehenden Begrenzungen werden

$$z_1 = c - \chi_1(y)\,\sin\nu \quad , \quad z_2 = c + \chi_2(y)\,\sin\nu \quad ;$$

mit derselben Beachtung wie vorher hat man daher in dieser Lage zuerst

$$\mathfrak{P}_x' = \mathfrak{P}'\sin\nu = p\int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c-\chi_1(y)\sin\nu}^{c+\chi_2(y)\sin\nu} dz \;.\; z = pc\sin\nu \int_{b_1}^{b_2} dy\,[\chi_2(y) + \chi_1(y)]$$

$$= pcO\,\sin\nu \quad , \quad \mathfrak{P}' = \mathfrak{P} = pcO \;,$$

wie schon oben bewiesen wurde, und dann wird

$$\mathfrak{P}_x'\,z_1' = p\int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c-\chi_1(y)\sin\nu}^{c+\chi_2(y)\sin\nu} dz \;.\; z^2 = \frac{1}{3}p\int_{b_1}^{b_2} dy\,[(c + \chi_2(y)\sin\nu)^3 - (c - \chi_1(y)\sin\nu)^3]$$

$$= pc^2 O\sin\nu + \frac{1}{3}p\sin^3\nu \int_{b_1}^{b_2} dy\,[(\chi_2(y))^3 + (\chi_1(y))^3] \;;$$

daraus folgt aber

$$z_1' = c + \frac{\int_{b_1}^{b_2} dy\,[(\chi_2(y))^3 + (\chi_1(y))^3]}{3\,O\,c}\sin^2\nu$$

und

$$\frac{z_1' - c}{\sin\nu} = (z_1 - c)\sin\nu \quad ;$$

wie es der obige Satz ausspricht. Der zweite Theil dieses Satzes wird durch Fig. 3 anschaulich gemacht, worin A X den Schnitt des Wasserspiegels mit der verticalen Ebene der Zeichnung darstellt, B C, B′ C′, B″ C″ die Schnitte dieser Ebene mit der gedrückten ebenen Figur in der verticalen, geneigten und horizontalen Lage um die horizontale Schwerachse in D, und E, E′ und D die Projectionen der Mittelpunkte des Druckes in diesen Lagen auf die xz-Ebene vorstellen.

Für ein beliebiges und beliebig liegendes Dreieck jedoch und andere geradlinig begrenzte Figuren, welche am einfachsten und sichersten durch die Coordinaten ihrer Eckpunkte bestimmt, und von denen dann die letztern immer durch Zerlegung in Dreiecke berechnet werden, wird man am besten von der Projection in der verticalen Wand ausgehen, um die Größe und den Mittelpunkt des Druckes zu bestimmen. Man hat dann für die zuletzt angenommene Lage der Coordinaten-Ebenen

$$\mathfrak{O} = \frac{O_3}{\sin\nu} \quad , \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_x \frac{1}{\sin\nu} = \frac{p\,O_3\,\mathfrak{Z}}{\sin\nu} = p\,\mathfrak{O}\,\mathfrak{Z} \quad ,$$

und wenn $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$ die Coordinaten der Eckpunkte eines der Dreiecke sind, aus welchen die Figur besteht, O_3' die Fläche seiner Projection in der yz-Ebene, $\mathfrak{Z}'$ den Abstand seines Schwerpunktes vom Spiegel, $\mathfrak{P}_x'$ die horizontale Componente des darauf ausgeübten Druckes und $\mathfrak{z}_1'$ und $\mathfrak{y}_1'$ die Ordinaten des Angriffspunktes dieser Kraft bezeichnen, so ist wie unter (3)

$$O_3' = \frac{1}{2}\left[y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) + y_3(z_1 - z_2)\right]$$

$$\mathfrak{Z}' = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) \quad , \quad \mathfrak{P}_x' = p\,O_3'\,\mathfrak{Z}' \quad ,$$

$$\mathfrak{Z}'\,\mathfrak{z}_1' = \frac{1}{6}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) \quad ,$$

$$\mathfrak{Z}'\,\mathfrak{y}_1' = \frac{1}{12}\left[z_1(2y_1 + y_2 + y_3) + z_2(y_1 + 2y_2 + y_3) + z_3(y_1 + y_2 + 2y_3)\right].$$

Werden dann die entsprechenden Größen der übrigen Dreiecke mit zwei, drei, u. s. w. Accenten bezeichnet, so hat man die Beziehungen:

$$\mathfrak{P}_x' + \mathfrak{P}_x'' + \mathfrak{P}_x''' + \text{etc.} = \mathfrak{P}_x \quad ,$$

$$\mathfrak{P}_x'\,\mathfrak{z}_1' + \mathfrak{P}_x''\,\mathfrak{z}_1'' + \mathfrak{P}_x'''\,\mathfrak{z}_1''' + \text{etc.} = \mathfrak{P}_x\,\mathfrak{z}_1 \quad ,$$

$$\mathfrak{P}_x'\,\mathfrak{y}_1' + \mathfrak{P}_x''\,\mathfrak{y}_1'' + \mathfrak{P}_x'''\,\mathfrak{y}_1''' + \text{etc.} = \mathfrak{P}_x\,\mathfrak{y}_1 \quad ,$$

oder

$$O_3' Z' + O_3'' Z'' + O_3''' Z''' + \text{etc.} = O_3 Z \quad ,$$

$$O_3' Z' z_1' + O_3'' Z'' z_1'' + O_3''' Z''' z_1''' + \text{etc.} = O_3 Z z_1 \quad ,$$

$$O_3' Z' y_1' + O_3'' Z'' y_1'' + O_3''' Z''' y_1''' + \text{etc.} = O_3 Z y_1 \quad ,$$

durch welche für jede geradlinig begrenzte ebene Figur die Größe und der Angriffspunkt des resultirenden Druckes einer schweren homogenen Flüssigkeit berechnet werden kann.

§. 16.

Als Beispiel einer **krummen** Wandfläche, welche auch Gelegenheit zu einer einfachen Anwendung der Kugel- und Cylinder-Coordinaten gibt, will ich eine mit einer tropfbaren Flüssigkeit gefüllte Halbkugel, Fig. 4, nehmen und den Druck auf eine Kugelhaube berechnen, deren begrenzende Ebene unter einem Winkel γ gegen die wagrechte Spiegelfläche der Flüssigkeit geneigt sei, ohne jedoch diesen Spiegel zu schneiden.

Die Spiegelfläche der Flüssigkeit sei die xy-Ebene, der Mittelpunkt O der Kugelfläche der Anfang der Coordinaten und die xz-Ebene so gelegt, daß sie auf der begrenzenden Ebene der Kugelhaube senkrecht steht, daß also die Gleichung dieser Ebene, deren Normale mit der z-Achse den Winkel γ bildet, die Form hat:

a.) $$x \sin\gamma + z \cos\gamma = h \quad ,$$

worin h die Länge der von O auf den Mittelpunkt F des Kreises ACB treffenden Normalen OF vorstellt. Ist dann R der Halbmesser der Kugelfläche, also

b.) $$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = F(x, y)$$

die Gleichung derselben, und r der Halbmesser AF des Begrenzungskreises der Kugelhaube, so erscheint dieser letztere in seiner Projection auf die xy-Ebene als eine Ellipse acb, deren Halbachsen cf und af gleich r und $r \cos\gamma$ sind, und deren Mittelpunkt f um $h \sin\gamma$ von O entfernt ist, deren Gleichung also die Form:

c.) $$\frac{(x - h \sin\gamma)^2}{r^2 \cos^2\gamma} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

hat, wie sich auch durch Elimination von z aus (a) und (b) ergibt, wenn man die Beziehung: $R^2 = r^2 + h^2$ berücksichtigt. Ebenso ist die Projection des Begrenzungskreises in der yz=Ebene eine Ellipse a′c′b′, deren Halbachsen c′f′ und a′f′ gleich r und r $\sin\gamma$ sind, und deren Mittelpunkt f′ um h $\cos\gamma$ von O entfernt auf der z=Achse liegt, welche also durch die Gleichung:

$$\frac{(z - h\cos\gamma)^2}{r^2\sin^2\gamma} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \qquad \text{(d.}$$

dargestellt wird, wie sich ebenfalls durch Elimination von x aus (a) und (b) ergibt. Die Projection der Kugelhaube in der xz=Ebene dagegen erscheint nicht mehr durch eine stetige Linie begrenzt, sondern als ein Kreisabschnitt AFBD, der von der Geraden (a) und dem größten Kreisschnitte ADB, dessen Gleichung:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2}\,, \qquad \text{(e.}$$

begrenzt wird, welcher aber nicht mehr die Projection der ganzen Kugelhaube vorstellt, sondern nur die Projection einer der beiden Hälften derselben, die zu beiden Seiten der xz=Ebene liegen.

Endlich haben wir aus der Gleichung (b)

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}\,, \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z}$$

und schließen daraus mit den Gleichungen (16), daß $\mathfrak{P}_x$ positiv zu nehmen ist, daß P $\cos\mu$ aber mit y das Zeichen wechselt, und daher $\mathfrak{P}_y$ für die eine, auf Seite der positiven y liegende Hälfte der Kugelhaube positiv, für die andere Hälfte negativ wird. Daraus folgt dann mit der vorhergehenden Bemerkung sogleich, daß die Componente $\mathfrak{P}_y$ für die ganze Kugelhaube Null werden muß, da sie sich aus zwei gleichen und entgegengesetzten Kräften zusammensetzt *).

Für die Componente $\mathfrak{P}_x$ hat man nun, wenn in die erste Gleichung (38) für z die Grenzwerthe aus (d) eingeführt werden, den Ausdruck:

---

*) Dieser Schluß ergibt sich übrigens auch daraus, daß die Projection der Begrenzung der ganzen Kugelhaube in der xz=Ebene auf die Gerade AB zurückkommt, und daß der Druck auf diese Null ist.

$$\mathfrak{P}_x = p\int_{-r}^{+r} dy \int_{h\cos\gamma - \sin\gamma\sqrt{r^2-y^2}}^{h\cos\gamma + \sin\gamma\sqrt{r^2-y^2}} dz \,.\, z = p\,h \sin 2\gamma \int_{-r}^{+r} dy \,.\, \sqrt{r^2-y^2}$$

$$= \frac{1}{2}\pi\, p\, h\, r^2 \sin 2\gamma \;.$$

Nach dem vorhergehenden §. hat man aber für den Druck auf die begrenzende Kreisebene, deren Mittelpunkt F um $h\cos\gamma$ unter dem Spiegel der Flüssigkeit liegt, den Werth: $\pi\, p\, h\, r^2 \cos\gamma$ und für die horizontale Componente desselben den Werth: $\pi\, p\, h\, r^2 \cos\gamma \sin\gamma$ oder $\frac{1}{2}\pi\, p\, h\, r^2 \sin 2\gamma$; es ist demnach die horizontale Componente des Druckes auf die Kugelhaube gleich derjenigen des Druckes auf die begrenzende Ebene, was übrigens auch einfach daraus hervorgeht, daß die Projection der Begrenzung beider Flächen in der yz-Ebene dieselbe ist.

Obgleich die Componente $\mathfrak{P}_y$ für die ganze Kugelhaube Null ist, dürfte es doch nicht überflüssig sein, den Druck $\mathfrak{P}_y'$ für eine Hälfte derselben zu berechnen; man hat dazu nach der zweiten Gleichung (38), wenn aus (a) und (e) die Grenzwerthe von z in Function von x eingesetzt werden, den Ausdruck:

$$\mathfrak{P}_y' = p\int_{h\sin\gamma - r\cos\gamma}^{h\sin\gamma + r\cos\gamma} dx \;.\; \int_{h\sec\gamma - x\tan\gamma}^{\sqrt{h^2+r^2-x^2}} dz \;.\; z$$

$$= \frac{1}{2}p\int_{h\sin\gamma - r\cos\gamma}^{h\sin\gamma + r\cos\gamma} dx \;.\; \left[r^2 - (h\tan\gamma - x\sec\gamma)^2\right] ,$$

aus welchem man leicht den einfachen Werth:

$$\mathfrak{P}_y' = \frac{2}{3}\, p\, r^3 \cos\gamma$$

erhalten wird.

Die dritte der Gleichungen (38) gibt mit den Grenzwerthen von y aus der Gleichung (c) für den verticalen Druck $\mathfrak{P}_z$ den Werth:

$$\mathfrak{P}_z = p \int_{h\sin\gamma - r\cos\gamma}^{h\sin\gamma + r\cos\gamma} dx \;.\; \int_{-\sqrt{r^2\cos^2\gamma - (x - h\sin\gamma)^2}\sec\gamma}^{+\sqrt{r^2\cos^2\gamma - (x - h\sin\gamma)^2}\sec\gamma} dy \;.\; \sqrt{r^2 + h^2 - x^2 - y^2}$$

$$= p \int_{h\sin\gamma - r\cos\gamma}^{h\sin\gamma + r\cos\gamma} dx \;.\; \Delta_y {}_{0}^{\sqrt{r^2\cos^2\gamma - (x - h\sin\gamma)^2}\sec\gamma} \;.\; \left(y\sqrt{r^2 + h^2 - x^2 - y^2} \right.$$

$$\left. + (r^2 + h^2 - x^2) \; arc \; sin \frac{y}{\sqrt{r^2 + h^2 - x^2}} \right),$$

welcher mit der Beachtung, daß sich mit dem angedeuteten Grenzwerthe von y die Reduction:

$$r^2 + h^2 - x^2 - y^2 = r^2 + h^2 - x^2 - \sec^2\gamma\,[r^2\cos^2\gamma - (x - h\sin\gamma)^2]$$
$$= \sec^2\gamma\,(h - x\sin\gamma)^2$$

ergibt, auf

$$\mathfrak{P}_z = p \int_{h\sin\gamma - r\cos\gamma}^{h\sin\gamma + r\cos\gamma} dx \;.\; \left[\sec^2\gamma\,(h - x\sin\gamma) \sqrt{r^2\cos^2\gamma - (x - h\sin\gamma)^2} \right.$$

$$\left. + (r^2 + h^2 - x^2) \; arc \; sin \sqrt{\frac{r^2\cos^2\gamma - (x - h\sin\gamma)^2}{(r^2 + h^2 - x^2)\cos^2\gamma}} \right]$$

zurückkommt und dann in zwei getrennten Integrationen weiter behandelt werden muß. Die erste dieser Integrationen kann ohne Schwierigkeit durchgeführt werden und wird sogar einfach, wenn man u für $x - h\sin\gamma$, also $h\cos^2\gamma - u\sin\gamma$ für $h - x\sin\gamma$, dann $+r\cos\gamma$ und $-r\cos\gamma$ als Grenzwerthe von u einführt; die zweite dagegen erfordert eine ziemlich lange Entwickelung. Man kommt etwas leichter zum Ziel wenn man die Ordnung im Integriren umkehrt und die Grenzen der x von y abhängig macht; es wird dann

$$\mathfrak{P}_z = p \int_{-r}^{+r} dy \;.\; \int_{h\sin\gamma - \cos\gamma\sqrt{r^2 - y^2}}^{h\sin\gamma + \cos\gamma\sqrt{r^2 - y^2}} dx \;.\; \sqrt{h^2 + r^2 - y^2 - x^2},$$

und daraus folgt wie oben, wenn r′ für $\sqrt{r^2 - y^2}$ gesetzt wird, zunächst

$$\mathfrak{P}_z = \frac{1}{2} p \int_{-r}^{+r} dy \, . \left[(h \sin\gamma + r' \cos\gamma) \sqrt{h^2 + r'^2 - (h \sin\gamma + r' \cos\gamma)^2} \right.$$

$$\left. - (h \sin\gamma - r' \cos\gamma) \sqrt{h^2 + r'^2 - (h \sin\gamma - r' \cos\gamma)^2} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} p \int_{-r}^{+r} dy \, . (h^2 + r'^2) \left[arc \sin \frac{h \sin\gamma + r' \cos\gamma}{\sqrt{h^2 + r'^2}} \right.$$

$$\left. - arc \sin \frac{h \sin\gamma - r' \cos\gamma}{\sqrt{h^2 + r'^2}} \right] .$$

Bezeichnet man nun die beiden Integrale des vorstehenden Ausdruckes mit $\mathfrak{P}_z'$ und $\mathfrak{P}_z''$, so findet man mit der Beachtung, daß

$$\sqrt{h^2 + r'^2 - (h \sin\gamma \pm r' \cos\gamma)^2} = h \cos\gamma \mp r' \sin\gamma \ ,$$

leicht den Werth:

$$\mathfrak{P}_z' = \frac{1}{2} p \int_{-r}^{+r} dy \, . \left[(h \sin\gamma + r' \cos\gamma) (h \cos\gamma - r' \sin\gamma) \right.$$

$$\left. - (h \sin\gamma - r' \cos\gamma) (h \cos\gamma + r' \sin\gamma) \right]$$

$$= p h \cos 2\gamma \int_{-r}^{+r} dy \, . \sqrt{r^2 - y^2} = \frac{1}{2} \pi p h r^2 \cos 2\gamma \ .$$

Man hat dann ferner

$$arc \sin \frac{h \sin\gamma \pm r' \cos\gamma}{\sqrt{h^2 + r'^2}} = arc \cos \sqrt{\frac{h^2 + r'^2 - (h \sin\gamma \pm r' \cos\gamma)^2}{h^2 + r'^2}}$$

$$= arc \cos \frac{h \cos\gamma \mp r' \sin\gamma}{\sqrt{h^2 + r'^2}} \ ,$$

und damit folgt

$$arc\ sin\frac{h\,sin\,\gamma+r'\,cos\,\gamma}{\sqrt{h^2+r'^2}}-arc\ sin\frac{h\,sin\,\gamma-r'\,cos\,\gamma}{\sqrt{h^2+r'^2}}=arc\ cos\frac{h^2-r'^2}{h^2+r'^2}$$

$$=arc\ cos\left[\frac{(h\,cos\,\gamma-r'\,sin\,\gamma)\,(h\,cos\,\gamma+r'\,sin\,\gamma)}{h^2+r'^2}\right.$$

$$\left.+\frac{(h\,sin\,\gamma+r'\,cos\,\gamma)\,(h\,sin\,\gamma-r'\,cos\,\gamma)}{h^2+r'^2}\right]$$

$$=2\,arc\ cos\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{h^2-r'^2}{h^2+r'^2}\right)}=2\,arc\ cos\frac{h}{\sqrt{h^2+r'^2}}$$

$$=2\,arc\ sin\frac{r'}{\sqrt{h^2+r'^2}}=2\,arc\ tang\frac{r'}{h}\ ;$$

sonach ergibt sich

$$\mathfrak{P}_z''=p\int_{-r}^{+r}dy\,.\,(h^2+r'^2)\ arc\ tang\frac{r'}{h}$$

$$=\frac{1}{3}\,p\ \underset{-r}{\overset{+r}{\varDelta}}\,.\,[3y\,(h^2+r^2)-y^3]\ arc\ tang\frac{\sqrt{r^2-y^2}}{h}$$

$$+\frac{1}{3}\,ph\int_{-r}^{+r}dy\,.\,\frac{3h^2+3r^2-y^2}{h^2+r^2-y^2}\,.\,\frac{y^2}{\sqrt{r^2-y^2}}\ .$$

Das erste Glied dieses Werthes wird an beiden Grenzen $=0$; derselbe kommt deßhalb auf das zweite Glied allein zurück und kann nun auf die Formen gebracht werden:

$$\mathfrak{P}_z''=\frac{1}{3}ph\int_{-r}^{+r}dy\,.\frac{y^2}{\sqrt{r^2-y^2}}+\frac{2}{3}ph(r^2+h^2)\int_{-r}^{+r}dy\,.\frac{y^2}{(h^2+r^2-y^2)\sqrt{r^2-y^2}}$$

$$=\frac{1}{3}ph\ \underset{-r}{\overset{+r}{\varDelta}}\,.-y\sqrt{r^2-y^2}+\frac{1}{3}\,ph\int_{-r}^{+r}dy\,.\sqrt{r^2-y^2}$$

$$-\frac{2}{3}ph(r^2+h^2)\int_{-r}^{+r}dy\,.\frac{1}{\sqrt{r^2-y^2}}+\frac{2}{3}ph\int_{-r}^{+r}dy\,.\frac{(r^2+h^2)^2}{(h^2+r^2-y^2)}\,.\frac{1}{\sqrt{r^2-y^2}},$$

oder, R^2 für r^2+h^2 gesetzt, und mit der Beachtung, daß in dem letzten

Integral $\frac{1}{\sqrt{r^2-y^2}}+\frac{d\,.\,arc\,sin\,\frac{y}{r}}{dy}=\frac{d\varphi}{dy}$, $y=r\,sin\,\varphi$ gesetzt werden kann,

$$\mathfrak{P}_z''=\frac{1}{6}\pi p h r^2-\frac{2}{3}\pi p h R^2+\frac{2}{3}p h R^2\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} d\varphi\,.\,\frac{1}{cos^2\varphi}\,.\,\frac{1}{1+\frac{h^2 tg^2\varphi}{R^2}}$$

$$=\frac{1}{6}\pi p h r^2-\frac{2}{3}\pi p h R^2+\frac{2}{3}p R^3\ \overset{+\frac{1}{2}\pi}{\underset{-\frac{1}{2}\pi}{\Delta}}\,.\,arc\left(lang=\frac{h}{R}tang\,\varphi\right)$$

$$=\frac{1}{6}\pi p h r^2+\frac{2}{3}\pi p R^2(R-h)\ ,$$

und damit erhält man endlich

$$\mathfrak{P}_z=\pi p\left[\frac{1}{2}h r^2 cos\,2\gamma+\frac{1}{6}h r^2+\frac{2}{3}R^2(R-h)\right]$$

$$=p\left[\pi h r^2 cos^2\gamma+\frac{2}{3}\pi R^2(R-h)-\frac{1}{3}\pi h r^2\right]$$

$$=\frac{2}{3}\pi p(R^3-h^3)-\pi p h r^2 sin^2\gamma\ .$$

als Maaß des verticalen Druckes *).

---

*) Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, daß man den Werth von $\mathfrak{P}_z$ viel leichter durch die gewöhnlichen geometrischen Lehrsätze gefunden haben würde, und man wird leicht in der zweiten Zeile des obigen Werthes in dem Gliede: $\pi h r^2 cos^2\gamma$ den Inhalt des auf der Basis der Kugelhaube stehenden schief abgeschnittenen elliptischen Cylinders, dessen Basis $=\pi r^2 cos\,\gamma$ und dessen mittlere Höhe $=h\,cos\,\gamma$ ist, in dem Gliede: $\frac{2}{3}\pi R^2(R-h)$ den Inhalt des der Kugelhaube entsprechenden Sectors und in dem Gliede $\frac{1}{3}\pi h r^2$ den Inhalt des auf der Kugelhaube stehenden Kegels, also in der Differenz $\frac{2}{3}\pi R^2(R-h)-\frac{1}{3}\pi h r^2$ den Inhalt des von der gedrückten Kugelhaube begrenzten Kugelsegments erkennen. Die dritte Zeile drückt den Inhalt des über dieser Kugelhaube stehenden cylindrischen Raumes noch anders aus; das erste Glied ist nach dem am Ende des §. 76

§. 17.

Bei einer Kugelfläche geht die Richtung des geometrischen Druckes P in allen Punkten derselben durch ihren Mittelpunkt; es muß folglich der physische Druck auf irgend einen Theil derselben durch eine einzige Kraft dargestellt werden können, deren Richtung ebenfalls durch den Mittelpunkt geht; es muß also nicht nur die Gleichung (22) befriedigt

---

im II. Buche ausgesprochenen Satze das Volumen des senkrecht über der Kugelhaube stehenden und im Mittelpunkte der Kugel parallel zur Basis der Haube begrenzten cylindrischen Raumes, und das zweite Glied drückt den Inhalt des auf der Basis des Kugelsegmentes stehenden, bis zur yz-Ebene reichenden horizontalen elliptischen Cylinders aus; es ist demnach der Inhalt unserer verticalen Drucksäule um den letztern Cylinder kleiner, als der senkrecht über der Kugelhaube stehende cylindrische Raum, und für $\gamma = 0$ kommt man auf den angeführten Satz zurück.

Außer diesen Bemerkungen dürfte es auch nicht überflüssig sein, bei dem Werthe von $\mathfrak{P}_z$ den Gang und die Resultate der Integrationen geometrisch zu interpretiren. Die erste Integration nach x gibt die Fläche des zur xz-Ebene parallelen und in der Entfernung y von dieser Ebene geführten Schnittes a′ A′ D′ B′ b′, Fig. 5, und zwar in zwei Theilen, von denen der eine die Differenz der Hälften der beiden Trapeze a′ A′ B′ b′ $= h\, r' \cos^2 \gamma$ und a″ A′ B′ b″ $= h\, r' \sin^2 \gamma$ und der andere die Differenz der Kreissectoren

$$B'O X' = \tfrac{1}{2}\, \overline{B'O}^2 \, arc \sin \frac{\overline{B'b'}}{\overline{B'O}} \quad \text{und} \quad A'O X' = \tfrac{1}{2}\, \overline{A'O}^2 \, arc \sin \frac{\overline{A'a'}}{\overline{A'O}},$$

also den Kreissector O A′ D′ B′ ausdrückt; es wird also durch diese Integration einmal die Fläche a′ A′ f B′ b′ dargestellt, und statt des Dreieckes A′ B′ f und des Kreissegmentes A′ D′ B′ oder statt des excentrischen Sectors f A′ D′ B′ wird die Differenz des centralen Sectors O A′ D′ B′ und des Dreieckes A′ f″ B′ substituirt, und man wird sich leicht überzeugen, daß $\triangle$ A′ f B′ + $\triangle$ A′ f″ B′ $= \triangle$ A′ B′ O.

Bei der weiteren Integration nach y werden dann die von diesen veränderlichen Schnittflächen bei ihrer Bewegung von $-r$ bis $+r$ erzeugten Räume berechnet, von denen besonders der von dem Kreissector O A′ D′ B′ beschriebene interessant ist, indem er einen K u g e l k e i l vorstellt, einen Körper, der auf der einen Seite von einer Kugelhaube begrenzt ist und dieser gegenüber in eine scharfe Schneide = dem Durchmesser der Kugelhaube ausläuft, und dessen Inhalt aus dem Kugelsector O A D B und aus zwei seitlichen, quasi windschief begrenzten Theilen besteht, welche zusammen der Hälfte des Kegels O A B $= \frac{1}{3} \pi h r^2$ gleich sind. Das Uebrige wird der aufmerksame Leser nun selbst zu interpretiren wissen.

werden, sondern auch, wenn der Mittelpunkt der Kugelfläche Anfangspunkt der Coordinaten ist, die Gleichungen:

$$\mathfrak{M}_z = 0 \quad , \quad \mathfrak{M}_y = 0 \quad , \quad \mathfrak{M}_x = 0$$

oder

$$\mathfrak{P}_x \, y_1 = \mathfrak{P}_y \, x_2 \quad , \quad \mathfrak{P}_z \, x_3 = \mathfrak{P}_x \, z_1 \quad , \quad \mathfrak{P}_y \, z_2 = \mathfrak{P}_z \, y_3 \ .$$

Um dieß für unsern gegebenen Fall vollständig nachzuweisen, wollen wir zunächst nur den Druck auf die durch die xz=Ebene begrenzte Hälfte unserer Kugelhaube betrachten. Wir haben dann

$$\mathfrak{P}_x = \frac{1}{4} \pi p h r^2 \sin 2\gamma \quad , \quad \mathfrak{P}_y = \frac{2}{3} p r^3 \cos\gamma \quad ,$$

$$\mathfrak{P}_z = \frac{1}{3} \pi p (R^3 - h^3) - \frac{1}{2} \pi p h r^2 \sin^2\gamma \quad ,$$

und die Gleichungen (20) führen auf folgende Berechnungen der Momente $\mathfrak{P}_x \, y_1$, $\mathfrak{P}_x \, z_1$, $\mathfrak{P}_y \, x_2$, u. s. f.

Es wird, $\sqrt{r^2 - y^2} = r'$ gesetzt,

$$\mathfrak{P}_x y_1 = p \int_0^r dy \, . \, y \int_{h\cos\gamma - r'\sin\gamma}^{h\cos\gamma + r'\sin\gamma} dz \quad . \quad z = p h \sin 2\gamma \int_0^r dy \, . \, y \sqrt{r^2 - y^2}$$

$$= \frac{2}{3} p h r^3 \sin\gamma \cos\gamma \quad ,$$

und

$$y_1 = \frac{4r}{3\pi} \ .$$

Ebenso hat man

$$\mathfrak{P}_x z_1 = p \int_0^r dy \int_{h\cos\gamma - r'\sin\gamma}^{h\cos\gamma + r'\sin\gamma} dz \quad . \quad z^2 = \frac{2}{3} p \sin\gamma \int_0^r dy \, (3h^2 r'^2 \cos^2\gamma + r'^3 \sin^2\gamma)$$

$$= \frac{2}{3} p \sin\gamma \left[(3h^2 \cos^2\gamma + r^2 \sin^2\gamma) \int_0^r dy \sqrt{r^2 - y^2} - \sin^2\gamma \int_0^r dy \, . \, y^2 \sqrt{r^2 - y^2} \right]$$

$$= \frac{1}{8} \pi p r^2 (4h^2 \cos^2\gamma + r^2 \sin^2\gamma) \sin\gamma \quad ,$$

folglich

$$z_1 = \frac{4h^2 \cos^2\gamma + r^2 \sin^2\gamma}{4h \cos\gamma} = h \cos\gamma + \frac{r^2 \sin^2\gamma}{4h \cos\gamma}$$

Weiter ergibt sich nach dem obigen Werthe von $\mathfrak{P}_\gamma'$

$$\mathfrak{P}_\gamma x_2 = p \int_{h \sin\gamma - r \cos\gamma}^{h \sin\gamma + r \cos\gamma} dx \quad . \quad x \int_{h \sec\gamma - x \tang\gamma}^{\sqrt{h^2+r^2-x^2}} dz \quad . \quad z$$

$$= \frac{p}{24 \cos^2\gamma} \Delta_{h \sin\gamma - r \cos\gamma}^{h \sin\gamma + r \cos\gamma} \quad . \quad x^2 \left[6(r^2 \cos^2\gamma - h^2 \sin^2\gamma) + 8hx \sin\gamma - x^2\right],$$

woraus mit den erforderlichen Reductionen die einfachen Werthe:

$$\mathfrak{P}_\gamma x_2 = \frac{2}{3} p h r^3 \sin\gamma \cos\gamma \quad , \quad x_2 = h \sin\gamma$$

hervorgehen. Weniger einfach ist die Berechnung von $\mathfrak{P}_\gamma z_2$; man hat zunächst

$$\mathfrak{P}_\gamma z_2 = p \int_{h \sin\gamma - r \cos\gamma}^{h \sin\gamma + r \cos\gamma} dx \quad . \int_{h \sec\gamma - x \tang\gamma}^{\sqrt{h^2+r^2-x^2}} dz \quad . \quad z^2$$

$$= \frac{1}{3} p \int_{h \sin\gamma - r \cos\gamma}^{h \sin\gamma + r \cos\gamma} dx \quad . \left[\left(\sqrt{h^2+r^2-x^2}\right)^3 - \frac{1}{\cos^3\gamma}\left(h - x \sin\gamma\right)^3\right]$$

und findet dann weiter, weil $h^2 + r^2 = R^2$,

$$\int dx . \left(\sqrt{h^2+r^2-x^2}\right)^3 = R^2 \int dx \, . \sqrt{R^2-x^2} - \int dx \, . \, x^2 \sqrt{R^2-x^2}$$

$$= \Delta \left[\left(\frac{5}{8}R^2 x - \frac{1}{4}x^3\right)\sqrt{R^2-x^2} + \frac{3}{8} R^4 \arcsin\frac{x}{R}\right]$$

und da wieder $\sqrt{R^2 - (h \sin\gamma \pm r \cos\gamma)^2} = h \cos\gamma \mp r \sin\gamma$, so folgt nach entsprechenden Umwandlungen

$$\underset{h\,sin\,\gamma - r\,cos\,\gamma}{\overset{h\,sin\,\gamma + r\,cos\,\gamma}{\Delta}} \cdot \left(\frac{5}{8} R^2 x - \frac{1}{4} x^3\right) \sqrt{R^2 - x^2} =$$

$$= \frac{1}{4} h\, r\, R^2 (5\, cos^2\gamma - 3\, sin^2\gamma)$$

$$- \frac{1}{2} h\, r^3\, cos^2 2\gamma - \frac{1}{2} r\, h^3\, sin^2 2\gamma$$

$$= \frac{1}{4} h\, r\, R^2\, (8\, cos^4\gamma - 3) - \frac{1}{2} h\, r^3\, cos\, 4\gamma \quad ,$$

und

$$\underset{h\,sin\,\gamma - r\,cos\,\gamma}{\overset{h\,sin\,\gamma + r\,cos\,\gamma}{\Delta}} \cdot \quad arc\ sin\ \frac{x}{R} = arc\ cos\ \frac{h^2 - r^2}{R^2} = 2\ arc\ tang\ \frac{x}{h} \; .$$

Das noch übrige Integral macht keine Schwierigkeit; man findet

$$\int dx\, (h - x\, sin\,\gamma)^3 = \Delta \, . - \frac{(h - x\, sin\,\gamma)^4}{4\, sin\,\gamma} \, ,$$

und zwischen den entsprechenden Grenzen kommt dieser Ausdruck auf

$$+\, 2\, r\, h\, (h^2\, cos^2\gamma + r^2\, sin^2\gamma)\, cos^5\gamma$$

zurück. Es wird demnach

$$\mathfrak{P}_y\, z_2 = \frac{1}{12} p\, r\, h\, [R^2 (5\, cos^2\gamma - 3\, sin^2\gamma) - 2 h^2\, sin^2 2\gamma - 2 r^2\, cos^2 2\gamma$$

$$+ \frac{1}{4}\, p\, R^4\ arc\ tang\ \frac{r}{h}$$

$$= \frac{1}{12} p\, r\, h\, [(8\, cos^2\gamma - 5)\, r^2 - 3 h^2] + \frac{1}{4}\, p\, R^4\ arc\ tang\ \frac{r}{h} \, ,$$

woraus für z_2 kein einfacher Werth hervorgeht.

Zuletzt ergeben sich noch mit den schon angewendeten Reductionen die Werthe:

$$\mathfrak{P}_z x_3 = p\int_0^r dy \int_{h \sin\gamma - r' \cos\gamma}^{h \sin\gamma + r' \cos\gamma} dx \;.\; x \sqrt{h^2 + r^2 - y^2 - x^2}$$

$$= \frac{1}{3} p \int_0^r dy \;.\; [(h \cos\gamma + r' \sin\gamma)^3 - (h \cos\gamma - r' \sin\gamma)^3]$$

$$= 2 p h^2 \sin\gamma \cos^2\gamma \int_0^r dy \;.\; \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{2}{3} p \sin^3\gamma \int_0^r dy \;.\; \sqrt{(r^2 - y^2)^3}$$

$$= \frac{1}{8} \pi p r^2 (4 h^2 \cos^2\gamma + r^2 \sin^2\gamma) \sin\gamma \quad ,$$

woraus auch für x_3 kein einfacher Werth hervorgeht, und

$$\mathfrak{P}_z y_3 = p \int_0^r dy \int_{h \sin\gamma - r' \cos\gamma}^{h \sin\gamma + r' \cos\gamma} dx \;.\; y \sqrt{h^2 + r'^2 - x^2}$$

$$= p h \cos 2\gamma \int_0^r dy \;.\; y \sqrt{r^2 - y^2} + p \int_0^r dy \;.\; (h^2 + r'^2) y \; arc\,tang \frac{r'}{h}$$

$$= \frac{1}{3} p h r^3 \cos 2\gamma + \frac{1}{4} p h \int_0^r dy \;.\; \frac{2h^2 + 2r^2 - y^2}{h^2 + r^2 - y^2} \;.\; \frac{y^3}{\sqrt{r^2 - y^2}}$$

$$= \frac{1}{3} p h r^3 \cos 2\gamma - \frac{1}{12} p h r^3 - \frac{1}{4} p r h^3 + \frac{1}{4} p (h^2 + r^2)^2 \; arc\,tang \frac{r}{h}$$

oder in anderer Form

$$\mathfrak{P}_z y_3 = \frac{1}{12} p h r [r^2 (8 \cos^2\gamma - 5) - 3 h^2] + \frac{1}{4} p R^4 \; arc\,tang \frac{r}{h} \; ,$$

und dieser Ausdruck führt ebenso wenig zu einem einfachen für y_3.

Die vorherberechneten Werthe zeigen übrigens, daß in der That die Gleichungen: $\mathfrak{M}_x = 0$, $\mathfrak{M}_y = 0$, $\mathfrak{M}_z = 0$ befriedigt werden, und geben, in die Gleichungen (23) eingesetzt, in Verbindung mit der Gleichung:

$$\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 + \mathbf{Z}^2 = R^2$$

die Coordinaten für den Mittelpunkt des Druckes; man findet dafür leicht die Werthe:

$$\mathfrak{X} = R\,\frac{\mathfrak{P}_x}{\mathfrak{P}}\ ,\qquad \mathfrak{Y} = R\,\frac{\mathfrak{P}_y}{\mathfrak{P}}\ ,\qquad \mathfrak{Z} = R\,\frac{\mathfrak{P}_z}{\mathfrak{P}}\ .$$

Nehmen wir als besondern Fall $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, $r = h = \frac{1}{2} R \sqrt{2}$, so erhalten wir für die Componenten des Druckes die Werthe:

$$\mathfrak{P}_x = \frac{1}{4}\pi p r^3 = \frac{1}{16}\pi p R^3 \sqrt{2}\ ,\qquad \mathfrak{P}_y = \frac{1}{3} p r^3 \sqrt{2} = \frac{1}{6} p R^3\ ,$$

$$\mathfrak{P}_z = \frac{1}{12}\pi p\,(4R^3 - 7r^3) = \frac{1}{48}\pi p R^3\,(16 - 7\sqrt{2})\ ,$$

und für die Momente dieser Componenten und die Coordinaten ihrer Richtungen die Ausdrücke:

$$\mathfrak{P}_x\,\mathfrak{y}_1 = \frac{1}{3} p r^4 = \frac{1}{12} p R^4 = \mathfrak{P}_y\,\mathfrak{x}_2\ ,$$

$$\mathfrak{x}_1 = \frac{4r}{3\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} R\ ,\qquad \mathfrak{y}_2 = \frac{1}{4} r \sqrt{2} = \frac{1}{2} R\ ,$$

$$\mathfrak{P}_x\,\mathfrak{z}_1 = \frac{5\pi}{32} p r^4 \sqrt{2} = \frac{5\pi}{128} p R^4 \sqrt{2} = \mathfrak{P}_z\,\mathfrak{x}_3\ ,$$

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{5}{8} r \sqrt{2} = \frac{5}{8} R\ ,\qquad \mathfrak{x}_3 = \frac{15}{8} R\,\frac{7+8\sqrt{2}}{79}\ ,$$

$$\mathfrak{P}_y\,\mathfrak{z}_2 = \frac{1}{16}\pi p R^4 - \frac{1}{3} p r^4 = \frac{1}{48} p R^4 (3\pi - 4) = \mathfrak{P}_z\,\mathfrak{y}_3\ ,$$

$$\mathfrak{z}_2 = \frac{1}{8} R\,(3\pi - 4)\ ,\qquad \mathfrak{y}_3 = \frac{(16+7\sqrt{2})\,(3\pi-4)}{158\,\pi} R.$$

Endlich hat man für den resultirenden Druck

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{24} p R^3 \sqrt{\pi^2\,(93 - 56\sqrt{2}) + 16}\ ,$$

und damit sind die Cosinus der Winkel seiner Richtung mit den drei Achsen und die Coordinaten des Durchgangspunktes derselben in der Kugelfläche leicht zu berechnen.

§. 18.

Viel einfacher wird die Berechnung des Druckes auf unsere halbe Kugelhaube, wenn man Kugelcoordinaten anwendet und dabei die Achsen so legt, daß die Grenzen der Veränderlichen möglichst einfach werden.*) Wir wollen dazu die bisherige Ebene der xz als Polarebene, aber die Gerade OZ', Fig. 6, welche auf der Basis der Kugelhaube senkrecht steht, als Polar-Achse annehmen und die entsprechenden Componenten des Druckes mit $\mathfrak{P}_x'$ (senkrecht zu OZ') und $\mathfrak{P}_z'$ (parallel zu OZ') bezeichnen.

Die Gleichung der gedrückten Fläche ist einfach

$$\mathfrak{r} = R \quad ,$$

folglich hat man

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\omega} = 0 \quad , \qquad \frac{d\mathfrak{r}}{d\vartheta} = 0 \quad ,$$

und die eingeklammerten Größen der Integrale (24ᵃ) reduziren sich dadurch auf ihre ersten Glieder. Ist dann M ein Punkt der Kugelhaube, und zieht man die größten Kreise MZ und $A'MD$, so hat man in dem sphärischen Dreieck MDZ

$$\widehat{MD} = \vartheta \quad , \quad \widehat{DZ} = \gamma \quad , \quad M\hat{D}X = \omega \quad , \quad M\hat{D}Z = \pi - \omega \quad ;$$

setzt man also noch $\widehat{MZ} = \zeta$, so wird

$$\cos\zeta = \cos\vartheta \cos\gamma - \sin\vartheta \sin\gamma \cos\omega \quad ,$$

und daraus folgt, weil $\cos\zeta = \frac{\overline{Mm}}{\overline{OM}} = \frac{z}{R}$,

$$P = pz = pR(\cos\vartheta \cos\gamma - \sin\vartheta \sin\gamma \cos\omega) \ .$$

*) Die Beachtung dieser Bemerkung vereinfacht zwar nicht sehr viel die Berechnung mit rechtwinkligen Coordinaten; es dürfte aber doch dem Leser zu empfehlen sein, diese Berechnung mit entsprechend geänderter Achsenlage noch einmal vorzunehmen.

Die Grenzen von ω sind offenbar 0 und π, und die von ϑ werden 0 und $\widehat{A'OD} = arc\ sin \frac{\overline{A'F}}{\overline{OA'}} = arc\ sin \frac{r}{R} = arc\ cos \frac{\overline{OF}}{\overline{OA'}}$ $= arc\ cos \frac{h}{R}$, also von ω unabhängig, und die erste der Gleichungen (24ᵃ) gibt mit diesen Werthen

$$\mathfrak{P}_x' = p R^3 \int_0^\pi d\omega \int_0^{arc\,cos\frac{h}{R}} d\vartheta \ . \ sin^2\vartheta\, cos\omega\, (cos\vartheta\, cos\gamma - sin\vartheta\, sin\gamma\, cos\omega)$$

$$= p R^3\, cos\gamma \int_0^\pi d\omega \ . \ cos\omega \int_0^{arc\,cos\frac{h}{R}} d\vartheta \ . \ sin^2\vartheta\, cos\vartheta$$

$$- p R^3\, sin\gamma \int_0^\pi d\omega \ . \ cos^2\omega \int_0^{arc\,cos\frac{h}{R}} d\vartheta \ . \ sin^3\vartheta \ .$$

Beachtet man dann, daß $cos^2\omega = \frac{1}{2}(1 + cos\, 2\omega)$, ferner $sin^3\vartheta = sin\vartheta\,(1 - cos^2\vartheta)$, und daß

$$\int_0^\pi d\omega \ . \ cos\omega = 0 \ , \quad \int_0^\pi d\omega \ . \ cos\, 2\omega = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\, 2\omega \ . \ cos\, 2\omega = 0 \ ,$$

so folgt sofort der Werth:

$$\mathfrak{P}_x' = -\frac{\pi}{2}\, p R^3\, sin\gamma \left[1 - \frac{h}{R} - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{h^3}{R^3}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{6}\,\pi p\, sin\gamma\, [3R^2(R-h) - R^3 + h^3]$$

$$= -\frac{1}{6}\,\pi p\, sin\gamma\, (R-h)(2R^2 - Rh - h^2)$$

$$= -\frac{1}{6}\,\pi p\, sin\gamma\, [R(R-h)^2 + r^2(R-h)] \ ,$$

welcher offenbar negativ ist und andeutet, daß $\mathfrak{P}_x'$ im Sinne von FB gerichtet ist, also den Winkel π mit der Ebene X′OZ′ einschließt.

Die zweite Gleichung (24ᵃ) wird sodann mit dem obigen Werthe für P und mit den Grenzen für ϑ

$$\mathfrak{P}_y = p\,R^3 \int_0^{\pi} d\omega \int_0^{arc\cos\frac{h}{R}} d\vartheta \;.\; \sin^2\vartheta \sin\omega\,(\cos\vartheta\cos\gamma - \sin\vartheta\sin\gamma\cos\omega)$$

$$= p\,R^3 \cos\gamma \int_0^{\pi} d\omega \;.\; \sin\omega \int_0^{arc\sin\frac{r}{R}} d\vartheta \;.\; \sin^2\vartheta\,\cos\vartheta$$

$$- p\,R^3 \sin\gamma \int_0^{\pi} d\omega \;.\; \sin\omega\cos\omega \int_0^{arc\cos\frac{h}{R}} d\vartheta \;.\; \sin^3\vartheta \quad ;$$

man hat also mit der Beachtung, daß

$$\int_0^{\pi} d\omega \;.\; \sin\omega = 2 \;, \quad \int_0^{\pi} d\omega \;.\; \sin\omega\cos\omega = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d2\omega \;.\; \sin 2\omega = 0 \;,$$

den frühern Werth:

$$\mathfrak{P}_y = \frac{2}{3}\,p\,R^3 \left(\frac{r^3}{R^3}\right) \cos\gamma = \frac{2}{3}\,p\,r^3 \cos\gamma \;.$$

Für die ganze Kugelhaube hat man das letzte Integral zwischen den Grenzen 0 und 2π zu nehmen, und dann ist

$$\int_0^{2\pi} d\omega \;.\; \sin\omega = 0 \;, \qquad \text{also auch } \mathfrak{P}_y' = 0 \;.$$

Mit der letzten der Gleichungen (24^a) hat man

$$\mathfrak{P}_z' = p\,R^3 \int_0^{\pi} d\omega \int_0^{arc\cos\frac{h}{R}} d\vartheta \;.\; \sin\vartheta\cos\vartheta\,(\cos\vartheta\cos\gamma - \sin\vartheta\sin\gamma\cos\omega)$$

$$= p\,R^3 \cos\gamma \int_0^{\pi} d\omega \int_0^{arc\cos\frac{h}{R}} d\vartheta \;.\; \sin\vartheta\,\cos^2\vartheta$$

$$= \frac{1}{3}\,\pi\,p\,\cos\gamma\,(R^3 - h^3) \;.$$

Will man nun aus den Werthen von $\mathfrak{P}_x'$ und $\mathfrak{P}_z'$ die der horizontalen und verticalen Componenten $\mathfrak{P}_x$ und $\mathfrak{P}_z$ ableiten, so hat man dazu die bekannten Beziehungen:

$$\mathfrak{P}_x = \mathfrak{P}_x' \cos\gamma + \mathfrak{P}_z' \sin\gamma\,, \quad \mathfrak{P}_z = \mathfrak{P}_z' \cos\gamma - \mathfrak{P}_x' \sin\gamma\,,$$

welche leicht auf die im vorhergehenden §. angegebenen Werthe zurückführen.

In gleicher Weise wie die Componenten $\mathfrak{P}_x'$, $\mathfrak{P}_y'$, $\mathfrak{P}_z'$ ergeben sich auch die Momente dieser Kräfte, als allgemeine Resultirende genommen, mit den Gleichungen (25[a]) sehr einfach. Man findet mit dem bisherigen Werthe von P und den Grenzen von ω und ϑ

$$\mathfrak{P}_x' y_1' = p R^4 \int_0^\pi d\omega \int_0^{arc\cos\frac{h}{R}} d\vartheta \,.\, \sin^3\vartheta \sin\omega \cos\omega \,(\cos\vartheta \cos\gamma - \sin\vartheta \sin\gamma \cos\omega)$$

$$= - p R^4 \sin\gamma \int_0^\pi d\omega \,.\, \sin\omega \cos^2\omega \int_0^{arc\cos\frac{h}{R}} d\vartheta \,.\, \sin^4\vartheta$$

$$= - \frac{2}{3} p R^4 \sin\gamma \int_0^{arc\sin\frac{r}{R}} d\vartheta \,.\, \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\vartheta + \frac{1}{8}\cos 4\vartheta\right)$$

$$= - \frac{2}{3} p R^4 \sin\gamma \left[\frac{3}{8} arc\sin\frac{r}{R} - \frac{1}{4}\sin\left(2\, arc\sin\frac{r}{R}\right) + \frac{1}{32}\sin\left(4\, arc\sin\frac{r}{R}\right)\right],$$

und nach einigen Reductionen ergibt sich

$$\mathfrak{P}_x' y_1' = \frac{1}{12} p r h\,(5r^2 + 3h^2) \sin\gamma - \frac{1}{4} p R^4 \sin\gamma\, arc\sin\frac{r}{R}\,.$$

Ebenso hat man aber auch

$$\mathfrak{P}_y' x_2' = p R^4 \int_0^\pi d\omega \int_0^{arc\cos\frac{h}{R}} d\vartheta \,.\, \sin^3\vartheta \sin\omega \cos\omega \,(\cos\vartheta \cos\gamma - \sin\vartheta \sin\gamma \cos\omega),$$

also $$\mathfrak{P}_{y}' z_2' = \mathfrak{P}_{x}' y_1' .$$

Ferner findet man

$$\mathfrak{P}_{x}' z_1' = p R^4 \int_0^{\pi} d\omega \int_0^{arc\cos\frac{h}{R}} d\vartheta \;.\; \cos\vartheta \sin^2\vartheta \cos\omega \,(\cos\vartheta \cos\gamma - \sin\vartheta \sin\gamma \cos\omega)$$

$$= - p R^4 \sin\gamma \int_0^{\pi} d\omega \;.\; \cos^2\omega \int_0^{arc\sin\frac{r}{R}} d\vartheta \;.\; \cos\vartheta \sin^3\vartheta$$

$$= - \frac{1}{8} \pi p r^4 \sin\gamma \;,$$

und derselbe Werth ergibt sich auch wieder für $\mathfrak{P}_{z}' x_3'$; denn es wird nach der dritten der Gleichungen (25^a) auch

$$\mathfrak{P}_{z}' x_3' = p R^4 \int_0^{\pi} d\omega \int_0^{arc\cos\frac{h}{R}} d\vartheta \;.\; \cos\omega \sin^2\vartheta \cos\vartheta \,(\cos\vartheta \cos\gamma - \sin\vartheta \sin\gamma \cos\omega) .$$

Zuletzt hat man noch

$$\mathfrak{P}_{y}' z_2' = p R^4 \int_0^{\pi} d\omega \int_0^{arc\cos\frac{h}{R}} d\vartheta \;.\; \sin^2\vartheta \cos\vartheta \,.\sin\omega \,(\cos\vartheta \cos\gamma - \sin\vartheta \sin\gamma \cos\omega)$$

$$= \mathfrak{P}_{z}' y_3' = p R^4 \cos\gamma \int_0^{\pi} d\omega \,.\sin\omega \int_0^{arc\sin\frac{r}{R}} d\vartheta \;.\; \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta \;,$$

also mit der Beachtung, daß $\sin^2\vartheta \cos^2\vartheta = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4\vartheta$,

$$\mathfrak{P}_{y}' z_2' = \mathfrak{P}_{z}' y_3' = \frac{1}{4} p R^4 \cos\gamma \left(arc\sin\frac{r}{R} - \frac{r h^3 - r^3 h}{R^4}\right)$$

$$= \frac{1}{4} p \cos\gamma \left[R^4 \, arc\sin\frac{r}{R} + r h (r^2 - h^2)\right] .$$

Ebenso einfach und selbst noch einfacher wird die Berechnung der Componenten $\mathfrak{P}_x'$, $\mathfrak{P}_y'$, $\mathfrak{P}_z'$ und ihrer Momente unter Anwendung der Cylinder-Coordinaten; denn die Gleichung der Kugelfläche nimmt die einfache Form an:

$$z'^2 = R^2 - r'^2 \quad ,$$

wenn wir zur Unterscheidung von dem constanten Halbmesser r des Begrenzungskreises der Kugelhaube die veränderlichen Abstände von der z'-Achse mit r' bezeichnen; es wird also z' von ω unabhängig, und die eingeklammerten Größen unter den Integralzeichen der Werthe (24b) und (25b) reduziren sich auf die zweiten Glieder. Man hat ferner

$$\frac{dz'}{dr'} = -\frac{r'}{z'} \quad \text{und} \quad z = z' \cos\gamma - r' \sin\gamma \cos\omega \quad ,$$

und findet damit den Ausdruck:

$$\mathfrak{P}_x' = p\int_0^\pi d\omega \int_0^r dr' \, . \, (z' \cos\gamma - r' \sin\gamma \cos\omega) \frac{r'^2}{z'} \cos\omega$$

$$= -p \sin\gamma \int_0^\pi d\omega \, . \cos^2\omega \int_0^r dr' \, . \frac{r'^3}{z'} = -p \sin\gamma \int_0^\pi d\omega \, . \frac{1}{2} \int_0^r dr' \, . \frac{r'^3}{\sqrt{R^2-r'^2}}$$

$$= -\frac{\pi}{6} p \sin\gamma \, (2R^3 - 3R^2h + h^3) \quad ,$$

welcher mit dem oben erhaltenen Werthe identisch ist. Ebenso ergibt sich

$$\mathfrak{P}_x' y_1' = \mathfrak{P}_y' x_1' = p\int_0^\pi d\omega \int_0^r dr' \, . (z' \cos\gamma - r' \sin\gamma \cos\omega) \frac{r'^3}{z'} \sin\omega \cos\omega$$

$$= p \sin\gamma \int_0^\pi d\omega \, . \, \sin\omega \cos^2\omega \int_0^r dr' \, . \frac{-r'^4}{\sqrt{R^2-r'^2}}$$

$$= \frac{2}{3} p \sin\gamma \left[r^3 h - 3\int_0^r dr' \, . \, r'^2 \sqrt{R^2-r'^2} \right] ,$$

$$= \frac{2}{3} p \sin\gamma \left(r^3h + \frac{3}{4} rh^3 - \frac{3}{8} R^2rh - \frac{3}{8} R^4 \arcsin\frac{r}{R} \right)$$

$$= \frac{1}{12} prh(5r^2+3h^2) \sin\gamma - \frac{1}{4} R^4 \sin\gamma \arcsin\frac{r}{R} ,$$

übereinstimmend mit dem frühern Werthe, und nicht weniger leicht wird man darnach auch die übrigen Componenten und Momente berechnen können.

§. 19.

Die bisherigen Rechnungen beruhen auf der Voraussetzung einer constanten Schwere sowohl nach verticaler als horizontaler Richtung; es ist aber schon bemerkt worden, daß für eine große Ausdehnung flüssiger Systeme in verticaler Richtung auf die Aenderung der Schwere Rücksicht genommen werden muß. Eine solche große Ausdehnung kommt übrigens nur vor für Wasser in den Meeren und für die atmosphärische Luft; wir wollen uns daher auch speciell auf diese beiden Fälle beschränken.

Da das Wasser einen Theil des Erdkörpers ausmacht und daher jeder Punkt des Meeres als innerhalb der Erde liegend zu betrachten ist, so kann für dieses flüssige System die Aenderung der Schwere nach Buch II, §. 107 annähernd der Aenderung der Entfernung vom Mittelpunkte der Erde proportional genommen werden; wenn demnach g die Beschleunigung des freien Falles an der Oberfläche der Erde, R deren Halbmesser bezeichnet, so hat man in einer Tiefe u unter derselben die Beschleunigung:

$$g' = g\,\frac{R-u}{R} \;.$$

Läßt man dann noch zu, daß die Richtung dieser Beschleunigung immer durch einen festen Punkt, den Mittelpunkt der Erde, gehe, und nimmt diesen als Coordinaten-Anfang an, so hat man als Componenten von g' nach drei rechtwinkligen Achsen

$$X = -g\,\frac{R-u}{R}\,\frac{x}{r} = -g\,\frac{x}{R} \;,\quad Y = -g\,\frac{y}{R} \;,\quad Z = -g\,\frac{z}{R} \;,$$

und damit folgt nach §. 5

$$\frac{dU}{ds} = -\frac{g}{R}\left(x\,\frac{dx}{ds} + y\,\frac{dy}{ds} + z\,\frac{dz}{ds}\right) = -\frac{g}{R}\,r\,\frac{dr}{ds} \;;$$

die Gleichung der Niveaufläche ist also einfach

$$r = k \;,$$

und diese Fläche eine Kugelfläche, wie vorherzusehen war. Man

wird sich darnach leicht überzeugen, daß in allen Fällen, wo die Kraft, welche auf die Flüssigkeitstheilchen wirkt, immer gegen einen festen Punkt gerichtet und eine Function der Entfernung von diesem Punkte ist, die Niveaufläche eine Kugelfläche sein muß, deren Mittelpunkt jener feste Punkt ist; denn man hat dann

$$X = \pm \varphi(r) \frac{x}{r} \quad , \quad Y = \pm \varphi(r) \frac{y}{r} \quad , \quad Z = \pm \varphi(r) \frac{z}{r} \, ,$$

also

$$\frac{dU}{ds} = \pm \frac{\varphi(r)}{r} \left(x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds} + z \frac{dz}{ds} \right) = \pm \varphi(r) \frac{dr}{ds} \, .$$

Nimmt man in unserm obigen Falle dann noch auf die Zusammendrückbarkeit des Wassers Rücksicht, setzt also nach (8)

$$q = q_0 \left(\alpha + \beta \frac{P}{P_0} \right)$$

und beachtet, daß aus dem obigen Werthe von $\frac{dU}{ds}$ sich

$$U - U_0 = \frac{g}{2R} (R^2 - r^2) = \frac{g}{2R} (2Ru - u^2) = g u \left(1 - \frac{u}{2R} \right)$$

ergibt, wenn man für $r = R$, $U = U_0$, also auch $P = P_0$ annimmt, so hat man nach (9) und (10)

$$40.) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= P_0 \left[\frac{1}{\beta} e^{\frac{\beta p_0 u}{P_0} \left(1 - \frac{u}{2R} \right)} - \frac{\alpha}{\beta} \right] , \\ q &= q_0 \, e^{\frac{\beta p_0 u}{P_0} \left(1 - \frac{u}{2R} \right)} \, ; \end{aligned} \right.$$

man wird sich aber leicht überzeugen, daß diese Werthe von den in §. 11 unter Voraussetzung einer constanten Schwere abgeleiteten sehr wenig abweichen, da das Verhältniß $\frac{u}{2R}$ auch für die tiefsten Meere ein sehr kleines ist (indem es höchstens den Werth: $\frac{1}{2000}$ erreicht) und daher besonders mit Rücksicht auf den sehr kleinen Werth von β, mit welchem es multiplizirt ist, und mit Rücksicht auf die Genauigkeit

dieses Werthes und die zu wünschende Genauigkeit der Werthe von P und q gänzlich vernachlässigt werden kann.

Für die atmosphärische Luft hat man in den vorhergehenden allgemeinen Beziehungen für $\varphi(r)$ den Werth:

$$\varphi(r) = -\frac{g R^2}{(R+r)^2}$$

einzusetzen, worin wie vorher g die Beschleunigung an der Meeresfläche oder in der Entfernung R vom Mittelpunkte der als unbewegt und kugelförmig gedachten Erde bedeutet; man hat daher

$$U - U_0 = g R^2 \int_r^{r_0} d r \cdot \frac{1}{(R+r)^2} = -g \frac{R^2 (r - r_0)}{(R+r)(R+r_0)},$$

oder wenn man das Product $r r_0$ neben $R r$ und R^2 vernachlässigt, mit hinreichender Annäherung

$$U - U_0 = -g \frac{r - r_0}{1 + \frac{r + r_0}{R}} .$$

Läßt man dann das Mariotte'sche Gesetz als vollkommen richtig zu, was hier schon wegen der viel größern Fehler, die aus der Veränderlichkeit der in der Luft enthaltenen Wassermenge entspringen, geschehen darf, so daß man hat

$$g q = p = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{P}} P ,$$

so ergibt sich für Druck und Dichte der Ausdruck:

$$logn \frac{P_0}{P} = \frac{\mathbf{P}(r - r_0)}{\mathbf{P}\left(1 + \frac{r + r_0}{R}\right)} = logn \frac{q_0}{q} = logn \frac{p_0}{p} ; \quad (41.$$

aus welchem aber auch der Höhen-Unterschied $r - r_0$ gefunden werden kann, wenn das Verhältniß der Dichten q_0 und q oder der geometrischen Spannungen P_0 und P an den betreffenden Orten gegeben, beziehungsweise durch directe Beobachtung bestimmt, und wenn die Höhe r_0 des einen Ortes über der Meeresfläche bekannt ist. Auf der Gleichung (41) beruht demnach in der Hauptsache die Theorie für die Höhen-

messung mittels des Barometers; um sie aber direct anwendbar zu machen, muß man mit ihr noch einige Umänderungen vornehmen, weil die Voraussetzungen, auf welche sie gestützt ist, mit der Wirklichkeit nicht völlig übereinstimmen.

§. 20.

Die Gleichung (41) setzt voraus, 1) daß die als geometrische Begrenzung der Erde angenommene Meeresfläche eine Kugelfläche, also R constant ist, 2) daß auch der atmosphärische Druck an der Meeresfläche, daß also der Werth von P_0 für $r_0 = 0$ oder überhaupt für irgend ein r_0 durchaus derselbe bleibt, oder daß die beiden Orte, deren Höhenunterschied zu suchen ist, in derselben Verticalen liegen, und 3) daß das geometrische Gewicht $\mathfrak{p}$ oder das Gewicht der Volumeneinheit atmosphärischer Luft unter einem bestimmten Normaldruck $\mathfrak{P}$ keiner Veränderung unterliegt, daß also die Temperatur und das Mengungsverhältniß der Gase, aus welchen die atmosphärische Luft besteht, an allen Orten der Erde und über der Erde und zu allen Zeiten dieselben sind, und daß die Fallbeschleunigung g oder daß die Gewichtseinheit für alle Orte der Meeresfläche constant ist.

Der Einfluß der Veränderlichkeit von R, das nur als Nenner des kleinen Bruches $\frac{r + r_0}{R}$ erscheint, ist viel zu gering im Vergleich zu den anderweitigen unvermeidlichen Vernachlässigungen und Fehlern, als daß dieselbe eine weitere Berücksichtigung verdiente.

Was die zweite Voraussetzung betrifft, so kann nach den bis jetzt bekannten Barometer=Beobachtungen noch nicht entschieden werden, ob der Luftdruck an der Meeresfläche für alle Orte der Erde constant ist. Wenn dieses der Fall wäre, müßten die auf die Temperatur 0° reducirten mittleren Barometerhöhen sich umgekehrt wie die Beschleunigungen des freien Falles oder die Längen des Sekundenpendels verhalten; denn man hat nach §. 11, wenn $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{P}$ und g die Barometerhöhe, den Luftdruck und die Fallbeschleunigung an einem beliebigen Orte der Meeresfläche bedeuten, und q_0 die Dichte des Quecksilbers bei 0° ist,

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{P}}{g\, q_0},$$

und nach §. 103 des ersten Buches folgt, wenn $\mathfrak{L}$ die Länge des Sekundenpendels an demselben Orte bezeichnet,

$$B = \frac{P}{\pi^2 q_0 L} \quad \text{oder} \quad B\,L = \frac{P}{\pi^2 q_0};$$

für ein constantes P müßte also auch das Produkt B L aus der Barometerhöhe in die Länge des Sekundenpendels für alle Orte der Meeresfläche constant sein, was durch die Beobachtungen nicht bestätigt zu werden scheint. Aus diesen Beobachtungen kann indessen doch soviel geschlossen werden, daß der mittlere Luftdruck an der Meeresfläche für Orte, welche nicht sehr weit von einander entfernt sind, nicht wesentlich verschieden ist, daß man daher mit Rücksicht auf die sonstigen Ungenauigkeiten, welche wir sogleich werden näher kennen lernen, und unter der Voraussetzung, daß man nur solche Stationen mit einander vergleicht, welche in geographischer Länge und Breite nicht sehr weit von einander entfernt sind, den Druck P_0 mit r_0 constant annehmen darf.

Von wesentlichem Einfluß dagegen auf die Höhenmessung mittels des Barometers sind die Abweichungen von der dritten Voraussetzung, und dieser Einfluß muß daher so gut wie möglich in Rechnung gebracht werden; denn um ihn mit mathematischer Strenge berücksichtigen zu können, müßte sowohl das Gesetz bekannt sein, nach welchem sich die Temperatur, als das, nach welchem sich der Wassergehalt der Luft mit der Entfernung von der Meeresfläche ändert, abgesehen davon, daß der Wassergehalt selbst wieder von der Temperatur und noch mit dieser von den klimatischen Verhältnissen der zu vergleichenden Orte abhängt. Der Einfluß der veränderlichen Fallbeschleunigung kann dagegen mit hinreichender Genauigkeit berücksichtigt werden.

Um zunächst den Einfluß der Temperatur in Rechnung zu bringen, muß man das im §. 3 angegebene combinirte Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz zu Grunde legen und demnach in die Gleichung:

$$\frac{dP}{dr} = -q\,g\,\frac{R^2}{(R+r)^2}, \tag{a}$$

von welcher wir nun ausgehen wollen, für die Dichte q der Luft im dem Abstande r von der Meeresfläche den Werth:

$$q = q_0\,\frac{P}{P}\,\frac{1}{1+\alpha\,\tau} \tag{b}$$

einführen, in welchem q_0 die Dichte derselben bei dem Normaldrucke P und der Temperatur 0^0 bezeichnet, und zwar bei vollkommner Trockenheit derselben, und worin die Temperatur τ als eine Function von r

zu betrachten ist. Weil man aber diese Function nicht kennt, so nimmt man gewöhnlich das arithmetische Mittel aus den Temperaturen τ_0 und τ_1 an dem untern und an dem obern Beobachtungsort als constante Temperatur der Luft zwischen beiden Orten an und ersetzt demnach das veränderliche τ in dem vorhergehenden Werthe von q durch die constante Temperatur $\frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_0)$, wodurch die Gleichung (a) die Form annimmt:

$$\text{c.)} \qquad \frac{dP}{dr} = P \frac{g\,q_0}{\mathrm{P}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}\alpha(\tau_1+\tau_0)} \cdot \frac{-R^2}{(R+r)^2} \,.$$

Den Einfluß des Wassergehaltes kann man dann annähernd in der Art berechnen, daß man annimmt, auch der Wassergehalt der Luft sei zwischen beiden Stationen constant, und zwar sei die Spannung des Wassergases in derselben gleich der Hälfte des Maximums der Spannung, welche der Temperatur $\frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_0)$ entspricht. Bezeichnen wir dann die Spannung des Wassergases bei 0° im Maximum mit P_0'' und lassen zu, daß zwischen -10^0 und $+20^0$, d. i. zwischen den der Anwendung entsprechenden Temperaturgrenzen, das Spannungsmaximum des Wasserdampfes der Temperatur proportional zunimmt, so haben wir für die Spannung P'' des Wassergases zwischen beiden Stationen den Ausdruck:

$$\text{d.)} \qquad P'' = \frac{1}{2}\left[P_0'' + \frac{1}{2}k(\tau_1 + \tau_0)\right] \,,$$

in welchem k ein aus den Spannungstabellen sich ergebender Coefficient ist. Die Spannung P' der trocknen Luft wird demnach $P - P''$ sein, und für ihre Dichte q' hat man

$$q' = \frac{q_0}{\mathrm{P}}(P - P'')\frac{1}{1+\frac{1}{2}\alpha(\tau_1+\tau_0)} \,.$$

Läßt man dann noch zu, daß die Dichte des Wassergases gleich $\frac{5}{8}$ von der Dichte der trocknen Luft bei gleicher Temperatur und Spannung, und daß der Ausdehnungs-Coefficient α für beide Gase gleich ist, so hat man für die Dichte q'' des Wassergases den Werth:

$$q'' = \frac{5}{8}\,\frac{q_0}{\mathrm{P}}\,\frac{P''}{1+\frac{1}{2}\alpha(\tau_1+\tau_0)} \,,$$

und damit folgt für die Dichte q des Gemenges

$$q = q' + q'' = \frac{q_0}{P} \frac{P}{1+\frac{1}{2}\alpha(\tau_1+\tau_0)} \cdot \left(1 + \frac{3}{8}\frac{P''}{P}\right) \cdot \quad (e.$$

Der Werth von P'' muß nun zur ferneren Reduction nach den Spannungstabellen in Zahlen ausgedrückt werden; man kann dazu mit hinreichender Annäherung das Spannungsmaximum des Wasserdampfes bei -10^0 zu $\overset{mm}{1,4}$, bei $+20^0$ zu 17^{mm} Quecksilber-Druck annehmen und erhält so den Coefficienten $k = \frac{17-1,4}{30} = 0,52$ und für P_0'' den Werth 6,6, womit sich dann

$$P'' = \overset{mm}{3,3} + \overset{mm}{0,26} \frac{\tau_1+\tau_0}{2}$$

ergibt. Beachtet man ferner, daß der Bruch $\frac{3}{8}\frac{P''}{P}$ immer ein sehr kleiner sein wird, da P nicht oft kleiner als 500^{mm} Quecksilberdruck vorkommen dürfte, und daß deßhalb jener Bruch einen hinreichend genauen Werth erhält, wenn man für P den constanten Werth: $\frac{1}{2}(760+500)^{mm} = 630^{mm}$ nimmt, so findet man $1 - \frac{3}{8}\frac{P''}{P} = 1 - 0,00196 - 0,000155 \frac{\tau_1+\tau_0}{2}$ und kann dafür auch $(1-0,00196)\left(1-0,000155\frac{\tau_1+\tau_0}{2}\right)$ oder $\frac{1-0,00196}{1+0,000155\frac{\tau_1+\tau_0}{2}}$ setzen. Damit wird dann einfach, $\alpha = 0,003665$ angenommen,

$$\frac{q}{P} = \frac{q_0}{P} \frac{1-0,00196}{1+0,00382\frac{\tau_1+\tau_0}{2}} = \frac{q_0}{P} \frac{0,99804}{1+0,00191(\tau_1+\tau_0)},$$

und die Gleichung (c) geht über in

$$-\frac{1}{P}\frac{dP}{dr} = \frac{g\,q_0}{P} \frac{0,99804}{1+0,00191(\tau_1+\tau_0)} \cdot \frac{R^2}{(R+r)^2} \cdot \quad (f.$$

Um endlich auch noch den Einfluß der Aenderung der Fallbeschleunigung in Rechnung zu bringen, darf man für g nur den in §. 104 des ersten Buches gefundenen Werth:

g.) $$g = 9{,}80627\,(1-0{,}002587\,\cos 2\beta)\,,$$

worin 9,80627 die Fallbeschleunigung für die geographische Breite $\beta = 45°$ bedeutet, in die Gleichung (f) einführen und 9,80627 $\mathfrak{q}_0$ durch $\mathfrak{p}_0$ ersetzen, wodurch dann aber bedingt wird, daß die Gewichtseinheit unter 45⁰ Breite die normale Einheit der Kraft oder des Druckes ist, und daß beide Beobachtungsorte unter demselben Breitegrade liegen oder, wie schon oben vorausgesetzt wurde, in der Breite nicht wesentlich verschieden sind. Mit dieser Substitution zieht man durch Integration aus der genannten Gleichung die gesuchte Beziehung:

$$logn\,\frac{P_0}{P_1} = 0{,}99804\,\frac{\mathfrak{p}_0}{\mathfrak{P}}\,\frac{1-0{,}002587\,\cos 2\beta}{1+0{,}00191\,(\tau_1+\tau_0)}\cdot\frac{r_1-r_0}{1+\frac{r_1+r_0}{R}}\,,$$

welche für die Höhenmessung mittels des Barometers an die Stelle der Gleichung (41) zu treten hat. Man findet daraus den Höhenunterschied der beiden Beobachtungsorte

42ᵃ.) $$r_1-r_0 = \frac{\mathfrak{P}}{0{,}99804\,\mathfrak{p}_0}\,\frac{1+0{,}00191\,(\tau_1+\tau_0)}{1-0{,}002587\,\cos 2\beta}\left(1+\frac{r_1+r_0}{R}\right)logn\,\frac{P_0}{P_1}$$

oder, wenn man

$$2{,}302585\,log\,\frac{P_0}{P_1} \quad \text{für} \quad logn\,\frac{P_0}{P_1}$$

einführt und den Coefficienten:

$$\frac{2{,}302585\,\mathfrak{P}}{0{,}99804\,\mathfrak{p}_0}$$

für die Zahlenwerthe:

$$\mathfrak{P} = 10332^{Kgr.}\,,\quad \mathfrak{p}_0 = 1{,}299^{Kgr.}$$

berechnet,

42ᵇ.) $$r_1-r_0 = 18350^m\,\frac{1+0{,}00191\,(\tau_1+\tau_0)}{1-0{,}002587\,\cos 2\beta}\cdot\left(1+\frac{r_1+r_0}{R}\right)\,log\,\frac{P_0}{P_1}\,.$$

In dieser Gleichung müssen aber noch für die unmittelbare Anwendung die Spannungen P_0 und P_1 durch die beobachteten Barometerhöhen B_0 und B_1, die Quecksilber-Temperaturen T_0 und T_1 und die übrigen

dabei Einfluß habenden Größen ausgedrückt werden. Dazu sei $\mathbf{W}_0$ das Gewicht der Volumeneinheit Quecksilber oder das geometrische Gewicht des Quecksilbers bei der Temperatur 0° an der Meeresfläche und unter 45° Breite, und φ der Volumen-Ausdehnungscoefficient desselben; man hat dann für die geometrischen Gewichte w_1 und w_0 an den beiden Beobachtungsorten nach dem Vorhergehenden die Werthe:

$$w_0 = \mathbf{W}_0 \frac{R^2}{(R+r_0)^2} (1-0,002587 \cos 2\beta) \frac{1}{1+\varphi T_0},$$

$$w_1 = \mathbf{W}_0 \frac{R^2}{(R+r_1)^2} (1-0,002587 \cos 2\beta) \frac{1}{1+\varphi T_1},$$

und daraus folgt mit hinreichender Annäherung

$$P_0 = B_0 w_0 = B_0 \mathbf{W}_0 \frac{1-0,002587 \cos 2\beta}{\left(1+\frac{2 r_0}{R}\right)(1+\varphi T_0)},$$

$$P_1 = B_1 w_1 = B_1 \mathbf{W}_0 \frac{1-0,002587 \cos 2\beta}{\left(1+\frac{2 r_1}{R}\right)(1+\varphi T_1)};$$

also

$$\frac{P_0}{P_1} = \frac{B_0}{B_1} \frac{\left(1+\frac{2 r_1}{R}\right)(1+\varphi T_1)}{\left(1+\frac{2 r_0}{R}\right)(1+\varphi T_0)}$$

oder wieder angenähert

$$\frac{P_0}{P_1} = \frac{B_0}{B_1} \left(1+2\frac{r_1-r_0}{R}\right)[1-\varphi(T_0-T_1)].$$

Beachtet man dann, daß $2\frac{r_1-r_0}{R}$ und $\varphi(T_0-T_1)$ ziemlich kleine Zahlenwerthe sind, daß man also mit hinreichender Genauigkeit

$$logn\left(1+2\frac{r_1-r_0}{R}\right) = 2\frac{r_1-r_0}{R},$$

$$logn\,[1-\varphi(T_0-T_1)] = -\varphi(T_0-T_1)$$

und

$$log\left(1+2\,\frac{r_1-r_0}{R}\right)=0{,}434294\;.\;2\,\frac{r_1-r_0}{R}\;,\quad \text{u. s. f.}$$

setzen kann, so ergibt sich mit dem Werthe: $\varphi=\frac{1}{5550}$

$$log\,\frac{P_0}{P_1}=log\,\frac{B_0}{B_1}+0{,}434294\left(2\,\frac{r_1-r_0}{R}-\frac{T_0-T_1}{5550}\right),$$

und die vollständige Formel für die Höhenmessung mittels des Barometers wird

$$43^a.)\;\left\{\begin{aligned} r_1-r_0&=18350\,\frac{1+0{,}00191\,(\tau_1+\tau_0)}{1-0{,}002587\,cos\,2\beta}\left(1+\frac{r_1+r_0}{R}\right)\times\\ &\times\left[log\,\frac{B_0}{B_1}+0{,}434294\left(2\,\frac{r_1-r_0}{R}-\frac{T_0-T_1}{5550}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Für die Anwendung dieser Formel muß man zuerst die kleinen Glieder $\frac{r_1+r_0}{R}$ und $2\,\frac{r_1-r_0}{R}$ vernachlässigen und dann die auf solche Weise als erste Annäherung sich ergebenden Werthe von r_1-r_0 und r_1+r_0 in die rechte Gleichungsseite einführen, um den genaueren Werth von r_1-r_0 zu erhalten. Gewöhnlich verzichtet man aber ganz auf die genannten kleinen Glieder und erhöht dafür sowohl den Coefficienten 0,00191 wegen der leichteren Berechnung auf 0,002, als auch den Coefficienten 18350 auf die Zahl 18393, welche man durch Vergleichung trigonometrischer Höhenbestimmungen mit den aus den Barometerbeobachtungen nach der in angegebener Weise abgekürzten Formel (43^a) sich ergebenden Höhenunterschieden abgeleitet hat. Die gewöhnlich angewendete Formel für die Höhenbestimmung mittels Barometer-Beobachtungen ist daher folgende:

$$43^b.)\;\left\{\begin{aligned} r_1-r_0&=18393\,(1+0{,}002587\,cos\,2\beta)\,[1+0{,}002\,(\tau_1+\tau_0)]\times\\ &\times[log\,B_0-log\,B_1-0{,}0000783\,(T_0-T_1)]\,;\end{aligned}\right.$$

sie ist ganz für die logarithmische Berechnung geeignet und erfordert mit fünfstelligen Logarithmen, namentlich wenn man sich für den Factor: $1+0{,}002587\,cos\,2\beta$ eine kleine Tabelle anfertigt, welche die Logarithmen dieses Factors für $\beta=0$, $=5^0$, $=10^0$, $=15^0$, u. s. f. enthält, nicht mehr Zeit, als die mehrfach aufgestellten, aus dieser

Formel abgeleiteten mechanischen Rechnungs-Recepte, für welche neben den Logarithmen noch mehrere andere Tabellen erforderlich sind.

Für die Ableitung der Formeln (42) wurde zugelassen, daß man die Temperatur der Luft zwischen beiden Stationen als constant und gleich dem arithmetischen Mittel der Temperaturen an beiden Stationen annehmen könne. Es dürfte übrigens nicht überflüssig sein, nachzuweisen, daß diese Annahme innerhalb der Grenzen unserer Annäherung mit dem aus der Erfahrung gefolgerten Gesetze übereinstimmt, daß in derselben Verticalen die Temperatur der Luft von unten nach oben nahezu dem Höhenunterschiede proportional abnimmt, daß man also

$$\frac{\tau_0 - \tau}{r - r_0} = \frac{1}{h} = \frac{\tau_0 - \tau_1}{r_1 - r_0}, \qquad \tau = \tau_0 + \frac{r_0 - r}{h} \qquad \text{(h.}$$

setzen kann, wenn h die Höhe bezeichnet, für welche in einer bestimmten Verticalen die Temperatur um 1 Grad abnimmt.

Läßt man nämlich die frühere Annahme in Betreff der Beziehung zwischen der Spannung des in der Luft enthaltenen Wassergases und der Temperatur der Luft bestehen, gibt also zu, daß für eine beliebige Entfernung r von der Meeresfläche, wo die Temperatur der Luft = τ ist, die Spannung des Wasserdampfes

$$P'' = \overset{mm}{3,3} + \overset{mm}{0,26}\,\tau \text{ Quecksilberdruck}$$

genommen werden kann, so wird die Gleichung (f) zunächst die Form:

$$-\frac{1}{P}\frac{dP}{dr} = 0{,}99804\,\frac{g\,q_0}{P}\cdot\frac{1}{1+0{,}00382\,\tau}\cdot\frac{R^2}{(R+r)^2}$$

annehmen und dann mit dem Werthe (h) von τ in

$$-\frac{1}{P}\frac{dP}{dr} = \frac{1}{H}\cdot\frac{1}{1+\beta\left(\tau_0+\frac{r_0-r}{h}\right)}\cdot\frac{R^2}{(R+r)^2} \qquad \text{(i.}$$

übergehen, worin $\frac{1}{H}$ für $0{,}99804\,\frac{g\,q_0}{P}$ und β für 0,00382 steht. Mit unserer frühern Annäherung kann man aber diese Gleichung auch schreiben:

$$-\frac{H}{P}\frac{dP}{dr} = R^2 \frac{1-\beta\left(\tau_0 + \frac{r_0}{h}\right) + \frac{\beta r}{h}}{(R+r)^2}$$

$$= R^2 \left[\frac{1-\beta\left(\tau_0 + \frac{r_0}{h} + \frac{R}{h}\right)}{(R+r)^2} + \frac{\beta}{h}\frac{1}{R+r}\right],$$

und die Integration gibt darnach

$$H\,logn\frac{P_0}{P} = R^2\left[\left(1-\beta\left(\tau_0+\frac{r_0}{h}+\frac{R}{h}\right)\right)\frac{r_1-r_0}{(R+r_1)(R+r_0)} + \frac{\beta}{h}logn\frac{R+r_1}{R+r_0}\right].$$

Setzt man dann wieder annähernd

$$\frac{R^2}{(R+r_1)(R+r_0)} = \frac{1}{1+\frac{r_1+r_0}{R}} \quad \text{und} \quad \frac{R+r_1}{R+r_0} = 1 + \frac{r_1-r_0}{R} - \frac{r_0(r_1-r_0)}{R^2}$$

und mit gleicher Annäherung

$$logn\left[1+\frac{r_1-r_0}{R} - \frac{r_0(r_1-r_0)}{R^2}\right] = \frac{r_1-r_0}{R} - \frac{r_0(r_1-r_0)}{R^2} - \frac{1}{2}\frac{(r_1-r_0)^2}{R^2}$$

$$= \frac{r_1-r_0}{R} - \frac{(r_1-r_0)(r_1+r_0)}{2R^2},$$

so ergibt sich

$$H\,logn\frac{P_0}{P} = \frac{r_1-r_0}{1+\frac{r_1+r_0}{R}}\left[1-\beta\left(\tau_0+\frac{r_0}{h}+\frac{R}{h}\right) + \right.$$

$$\left. + \beta\left(1+\frac{r_1+r_0}{R}\right)\left(\frac{R}{h} - \frac{r_1+r_0}{2h}\right)\right]$$

$$= \frac{r_1-r_0}{1+\frac{r_1+r_0}{R}}\left[1-\beta\left(\tau_0+\frac{r_0-r_1}{2h}\right)\right],$$

wenn das mit den kleinen Factoren β und $\frac{r_1+r_0}{R}$ behaftete Glied: $\beta\,\frac{(r_1+r_0)^2}{2hR}$ vernachlässigt wird. Es ist aber nach (h)

$$\tau_0 + \frac{r_0 - r_1}{2h} = \tau_0 + \frac{\tau_1 - \tau_0}{2} = \frac{\tau_1 + \tau_0}{2} \;;$$

wird dann wieder

$$1 + \beta \frac{\tau_1 + \tau_0}{2} \quad \text{für} \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\beta(\tau_1 + \tau_0)}$$

gesetzt, so folgt die Gleichung:

$$r_1 - r_0 = H \left(1 + \beta \frac{\tau_1 + \tau_0}{2}\right) \left(1 + \frac{r_1 + r_0}{R}\right) logn \frac{P_0}{P_1} \;,$$

welche mit Berücksichtigung des Werthes (g) für die in H enthaltene Fallbeschleunigung g mit der Gleichung (42ᵃ) übereinstimmt.

Schließlich ist noch zu bemerken, daß selbst die erste und wesentlichste Voraussetzung, auf welcher die Ableitung der vorhergehenden Beziehungen beruht, nämlich die Voraussetzung eines Gleichgewichtszustandes der Atmosphäre, in Wirklichkeit niemals strenge erfüllt wird, und um so weniger, je mehr die Luft in verticaler oder horizontaler Bewegung begriffen ist; und es ist bekannt, daß starke Winde wesentliche Aenderungen in dem Barometerstande eines Ortes verursachen. Für die Anwendung jener Beziehungen zur Höhenmessung mittels des Barometers geht daraus die Andeutung hervor, daß sie nur dann der Wahrheit genügend sich nähernde Werthe geben können, wenn die Barometerbeobachtungen bei möglichst ruhiger Luft angestellt werden, wie denn auch die frühere Voraussetzung eines der Temperatur der Luft entsprechenden mittleren Wasserdampf-Gehaltes verlangt, daß man sich bei Anstellung solcher Beobachtungen auch von dem Feuchtigkeitszustande der Luft Kenntniß verschaffen und sie zu dem gedachten Zwecke nur dann anstellen soll, wenn sich dieser Zustand nicht zu sehr seinen Grenzen nähert.

§. 21.

In §. 10 wurde der Fall betrachtet, wo nur die Schwere auf die Theilchen eines flüssigen Systems wirkt, und es wurde dabei von einer Anziehung zwischen diesen Theilchen selbst sowie von einer solchen zwischen ihnen und den Gefäßwänden gänzlich Umgang genommen; die daselbst aus den allgemeinen Gesetzen gefolgerten Schlüsse in Betreff der Form der Niveauflächen und der relativen Lage der Spiegelflächen einer schweren Flüssigkeit, welche durch feste Wände in mehrere, unter

sich in Verbindung stehende Abtheilungen getheilt ist, stimmen daher mit der Erfahrung nicht vollkommen überein, da in Wirklichkeit jene vernachlässigten Anziehungen vorhanden sind und zwei wesentliche Modificationen in den Schlüssen des §. 10 hervorrufen, je nachdem die Anziehung oder Cohäsion der Flüssigkeitstheilchen unter sich größer oder kleiner ist, als die Anziehung zwischen den Flüssigkeitstheilchen und den Gefäßwänden, welche man gewöhnlich mit dem Namen: Adhäsion bezeichnet.

Dieser Unterschied läßt sich unmittelbar daraus erkennen, daß ein Tropfen der Flüssigkeit auf einer horizontalen Ebene bald die Tropfenform wenigstens annähernd behält, bald auf derselben zerfließt und dieselbe benetzt; im ersten Fall muß offenbar die Cohäsion größer sein, als die Adhäsion, im zweiten dagegen muß die letztere über die erstere überwiegen. In diesem zweiten Falle wirkt allerdings auch die Schwere im Sinne der Adhäsion; der Versuch zeigt aber, daß, wenn dieser zweite Fall stattfindet, der Tropfen auch an der vertical gestellten Ebene zerfließt, und die sich ausbreitende Flüssigkeit an derselben sogar aufsteigt, und es muß daraus geschlossen werden, daß bei unmittelbarer Berührung die Wirkung der Gefäßwand auf die Flüssigkeitstheilchen auch größer ist, als die Wirkung der Schwere.

Die oben erwähnten Modificationen der in §. 10 ausgesprochenen Gesetze für den Gleichgewichtszustand einer schweren Flüssigkeit bestehen nun hauptsächlich in Folgendem:

1) Wenn die in einem Gefäße enthaltene Flüssigkeit von der Art ist, daß sie die Gefäßwände benetzt oder an denselben zerfließt, wenn also die Adhäsion zur Gefäßwand größer ist als die Cohäsion der Flüssigkeit, so bemerkt man in der Nähe der Gefäßwand eine kleine concave Erhebung der Flüssigkeit, wie A n D und B m C, Fig. 7, während zwischen A und B die Spiegelfläche eben ist. Es folgt daraus nach dem in §. 5 für die Niveauflächen abgeleiteten allgemeinen Gesetze, daß in B die Resultirende der auf die Flüssigkeitstheilchen wirkenden geometrischen Kräfte vertical gerichtet sein muß, daß also in B die Wirkung der Wand schon verschwindend klein ist, daß in m, wo die Normale den Winkel $\frac{1}{4}\pi$ mit der Verticalen bildet, die Beschleunigung der Schwere und die geometrische Wirkung der Wand gleiche Intensität haben, und daß in C, wo die Spiegelfläche der Flüssigkeit die vertical angenommene Wand fast tangirt oder unter einem sehr spitzen Winkel trifft, die letztere Wirkung über die der Schwere weit überwiegt.

2) Wenn die Wände sehr nahe gerückt werden, wie MN und PQ, so daß die Anfänge A und B der concaven Erhebung zusammentreffen,

oder übereinander wegrücken müßten, so vereinigen sich beide Concavitäten zu einer concaven Fläche und die Flüssigkeit steigt zwischen den Wänden empor, da sich nun die Anziehung der Wände auf die ganze zwischen denselben befindliche Flüssigkeitssäule erstreckt. Ferner muß die Anziehung um so stärker werden, je näher die Wände zusammenkommen, und sich um so mehr durch Erhebung der Flüssigkeit über das ursprüngliche Niveau AB offenbaren können, je weniger Gewicht die zu erhebende Flüssigkeitssäule besitzt, und die Erfahrung zeigt in der That, daß die Erhebung um so größer wird, je kleiner man den Abstand der Wände macht, und zwar so, daß die Erhebung diesem Abstande nahe verkehrt proportional ist. Es muß daraus geschlossen werden, daß die verticale Componente der Resultirenden aus der anziehenden Wirkung der Wände und der Cohäsion der Flüssigkeitstheilchen nahe der horizontalen Länge der benetzten Wände proportional ist; denn bezeichnet Z diese Componente, p das geometrische Gewicht der Flüssigkeit, l die horizontale Länge zweier parallelen Wände, a ihren Abstand und h die Erhebung des tiefsten Punktes b der concaven Fläche abc über das ursprüngliche Niveau AB, so ist mit Vernachlässigung des kleinen über b liegenden Ringes $palh$ das Gewicht der über AB gehobenen Flüssigkeitssäule; es muß daher auch nahezu

$$Z = plah$$

sein, und da nach der Beobachtung $h = \frac{k}{a}$ ist, so folgt mit gleicher Annäherung

$$Z = kpl = 2Kl \,,$$

wenn $K = \frac{1}{2}kp$ die verticale Wirkung für die Einheit der benetzten horizontalen Länge bezeichnet.

Umgekehrt hat man darnach für parallele Wände

$$h = 2\frac{K}{a} \,,$$

für eine cylindrische Röhre vom Halbmesser r

$$Z = K \cdot 2\pi r = \pi p r^2 h \,, \quad h = 2\frac{K}{r} \,,$$

für den cylindrischen Raum zwischen zwei concentrischen Cylinderflächen, deren Halbmesser r_1 und r_2 sind,

$$Z = 2\pi K\,(r_1 + r_0) = \pi p h\,(r_1^2 - r_0^2)\ , \quad h = 2\,\frac{K}{r_1 - r_0}\ ,$$

u. s. f. Es muß also die Erhebung der Flüssigkeit in diesen verschiedenen Arten von Abtheilungen eines Gefäßes gleich groß sein, wenn $a = r = r_1 - r_0$ ist, d. h. wenn der Halbmesser der cylindrischen Röhre dem Abstand der parallelen oder cylindrischen Wände gleich ist, was denn auch die Erfahrung bestätigt.

3) Wenn die Cohäsion der Flüssigkeitstheilchen größer ist, als die Adhäsion an den Gefäßwänden, so zeigt sich in der Form der Spiegelfläche die entgegengesetzte Erscheinung; in weiten Gefäßen krümmt sich die ebene Spiegelfläche A B, Fig. 8, in der Nähe der Wände abwärts und nimmt die Form A m D, B n C an; zwischen naheliegenden Wänden erscheint die Spiegelfläche durchaus convex gewölbt und unter das Niveau A B im weiten Gefäß herabgedrückt. Zur Erklärung dieser Erscheinung ist es indessen nicht nothwendig, eine abstoßende Kraft zwischen der Flüssigkeit und den Gefäßwänden anzunehmen, diese Annahme ist vielmehr unzulässig, weil die Erfahrung zeigt, daß selbst zwischen Glas und Quecksilber noch Adhäsion vorhanden ist; es genügt die bereits ausgesprochene Ursache, daß die Cohäsion der Flüssigkeitstheilchen größer ist, als die Adhäsion zu den Wänden. Wenn wir die letztere ganz umgehen, so muß die Flüssigkeit in Folge der ersteren das Bestreben zur Tropfenform zeigen, und dieses Bestreben ist die wesentliche Ursache jener Erscheinung, welche durch die Adhäsion nur etwas modificirt wird.

Diese Erscheinung läßt sich deßhalb im Großen mit irgend einer schweren Flüssigkeit, z. B. Wasser, nachahmen, welches in eine sehr dünne und dehnbare und hinreichend große kugelförmige Blase eingeschlossen ist und diese ganz ausfüllt. Auf eine horizontale Ebene gelegt wird diese Blase eine flachgedrückte Form annehmen, wie ein großer Quecksilbertropfen auf einer horizontalen Glasplatte; zwischen einer verticalen cylindrischen Wand eingedrückt, wird sie in der Mitte nahezu eben, gegen die Wände hin abwärts gekrümmt sein, und wenn man eine cylindrische Röhre, die hier schon ziemlich weit sein darf, vertical auf die Blase aufsetzt und hineindrückt, so wird die letztere zwar in die Röhre eintreten, aber wegen des viel größern Spannungswiderstandes bei weitem nicht so hoch, als die Oberfläche der Blase, welche die Röhre umgibt, und die Begrenzungsfläche in der Röhre wird viel stärker gekrümmt sein, als es die Blase außerhalb derselben ist, gerade wie es bei Quecksilber in engen Glasröhren beobachtet wird. Das Gesetz für die Depression des Quecksilbers in solchen Röhren muß deßhalb auch

wesentlich verschieden sein von dem Gesetze für die Elevation des Wassers oder anderer Flüssigkeiten, welche das Glas benetzen, und die übereinstimmenden Versuche von Young und Ivory zeigen in der That, daß die Depression nicht wie die Elevation dem Durchmesser der Röhre verkehrt proportional ist, sondern einem complicirteren Gesetze folgt, welches nahe mit der Form:

$$h = \frac{A}{e^{ar} - 1}$$

übereinstimmt, wenn r den Halbmesser der Röhre, h die Depression bezeichnet und A und a zwei Constante sind.

Es würde indessen viel zu weit führen, wenn ich hier für diese besondere Erscheinung im Gleichgewicht der Flüssigkeiten, welche man gewöhnlich mit dem Namen: Capillarität bezeichnet, auf Grund der vorhergehenden Gesichtspunkte eine mathematische Theorie durchführen oder die bisherigen Theorien, unter denen bis jetzt noch diejenigen von Laplace und Poisson das meiste Ansehen genießen, welche aber alle viel zu wünschen übrig lassen, einer Erörterung unterziehen wollte.

II. Inneres Gleichgewicht bei äußerer Bewegung.

§. 22.

Wenn ein flüssiges System eine äußere Bewegung besitzt, und zwar zunächst nur eine fortschreitende, so finden die Gleichungen (77) in §. 38 des dritten Buches Anwendung, und diese nehmen mit den in §§. 4 und 5 des gegenwärtigen Buches besprochenen Aenderungen, welche ebensowohl für sie, als für die Gleichungen (75^b) gelten, die Form an:

$$44.)\quad \begin{cases} \dfrac{dP}{dx} = q\left(X - \dfrac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\right), \quad \dfrac{dP}{dy} = q\left(Y - \dfrac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}\right), \\ \dfrac{dP}{dz} = q\left(Z - \dfrac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}\right), \end{cases}$$

worin $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Coordinaten des Anfangspunktes eines parallel fortschreitenden Coordinatensystems in Bezug auf feste Achsen und x, y, z die Coordinaten eines Punktes der Flüssigkeit in Bezug auf diese fortschreitenden Achsen bezeichnen. Man wird demnach für den jetzigen Fall die erforderlichen analytischen Beziehungen aus denen des §. 5 einfach dadurch ableiten, daß man darin die absoluten Beschleunigungen: X, Y, Z durch die relativen: $X - \frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}$, $Y - \frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}$ und $Z - \frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}$ ersetzt.

Auf diese Weise ergeben sich zuerst aus den Gleichungen (3) die Bedingungen:

$$45.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\,.\,q\left(X - \dfrac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\right)}{dy} = \dfrac{d\,.\,q\left(Y - \dfrac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}\right)}{dx}, \\ \dfrac{d\,.\,q\left(X - \dfrac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\right)}{dz} = \dfrac{d\,.\,q\left(Z - \dfrac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}\right)}{dx}, \\ \dfrac{d\,.\,q\left(Y - \dfrac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}\right)}{dz} = \dfrac{d\,.\,q\left(Z - \dfrac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}\right)}{dy}, \end{cases}$$

welche befriedigt werden müssen, wenn ein innerer Gleichgewichtszustand überhaupt stattfinden soll, und welche wieder auf die einzige Bedingung:

$$q\left[\left(X-\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\right)\frac{dx}{ds}+\left(Y-\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}\right)\frac{dy}{ds}+\left(Z-\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}\right)\frac{dz}{ds}\right]=\frac{d.F(x,y,z)}{ds}$$

zurückführen. Diese letztere zerfällt dann in die beiden einfacheren Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{l}\left(X-\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\right)\frac{dx}{ds}+\left(Y-\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}\right)\frac{dy}{ds}+\left(Z-\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}\right)\frac{dz}{ds}\\ \qquad\qquad =\frac{d.f(x,y,z)}{ds}=\frac{dU}{ds}\\ \text{und}\quad q=\varphi'[f(x,y,z)]=\varphi'(U),\end{array}\right\} \quad (46.$$

und man hat nun als Differentialgleichung der Niveauflächen den Ausdruck:

$$\left(X-\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\right)\frac{dx}{ds}+\left(Y-\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}\right)\frac{dy}{ds}+\left(Z-\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}\right)\frac{dz}{ds}=\frac{dU}{ds}=0\ ; \quad (47.$$

die Niveauflächen haben demnach nun die Eigenschaft, daß sie in allen Punkten zur Richtung der relativen beschleunigenden Resultirenden

$$R_{,}=\sqrt{\left(X-\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\right)^2+\left(Y-\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}\right)^2+\left(Z-\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}\right)^2}$$

normal sind.

Beachtet man dann, daß im Allgemeinen die beschleunigenden Kräfte: X, Y, Z Functionen von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und x, y, z sein werden, und daß die Beschleunigungen: $\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}$, $\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}$ und $\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}$ immer als Functionen von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ausgedrückt werden können, wenn das Gesetz der äußern fortschreitenden Bewegung bekannt ist, so wird man einsehen, daß die Gleichung (47) oder die Function $\frac{dU}{ds}$ im Allgemeinen außer den Coordinaten x, y, z auch die von den letztern unabhängigen Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ des beweglichen Anfangspunktes enthalten wird; es wird dann auch die Function U selbst eine Function von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ werden und demnach die Niveaufläche mit der Lage

des beweglichen Anfangspunktes oder, was dasselbe ist, mit der Zeit veränderlich sein; in diesem Falle gibt es nur einen augenblicklichen innern Gleichgewichtszustand. Soll daher der innere Gleichgewichtszustand ein dauernder sein und die Niveauflächen unveränderlich bleiben, so müssen die Functionen X, Y, Z und $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ von der Art sein, daß die relativen Beschleunigungen: $X - \frac{d^2x}{dt^2}$, $Y - \frac{d^2y}{dt^2}$, $Z - \frac{d^2z}{dt^2}$ von x, y und z unabhängig oder wie die absoluten Beschleunigungen X, Y, Z in §. 5 nur Functionen von x, y, z werden.

Die Bedingungen für einen dauernden innern Gleichgewichtszustand eines flüssigen Systems bei äußerer fortschreitender Bewegung bestehen also darin, daß

1) die Differentialgleichung der Niveauflächen (47) in Bezug auf die drei Veränderlichen x, y, z eine vollständige Differentialgleichung ist,

2) daß die Function $\frac{dU}{ds}$ weder eine der Veränderlichen x, y, z, noch die Zeit t, weder die Aenderungsgesetze oder Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, noch die Aenderungsgesetze oder Winkelfunctionen $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, oder irgend eine andere Function jener Veränderlichen enthält, die sich auf die äußere Bewegung beziehen, und daß wieder

3) die geometrische Dichte q nur eine Function von U, also für die ganze Ausdehnung einer Niveaufläche constant ist.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so geben die Gleichungen (44) für den geometrischen Druck P die Beziehungen:

$$48^a.)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dP}{ds} &= q\left[\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{dx}{ds}+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dy}{ds}+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{dz}{ds}\right] \\ &= \varphi'(U)\frac{dU}{ds}\quad, \\ P &= P_0 + \varphi(U) - \varphi(U_0)\quad; \end{aligned} \right.$$

es kann dann aber auch wieder die Dichte q als Function von P gegeben sein, und man hat dann

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP}{ds} &= \psi'(P)\,\frac{dU}{ds}\;, \\ U - U_0 &= \int_{P_0}^{P} dP\,.\,\frac{1}{\psi'(P)} \end{aligned}\right\} \qquad (48).$$

als die Gleichungen, durch welche P zu berechnen ist.

Im Uebrigen bleiben alle Erörterungen der §§. 5 und 6 unverändert bestehen, wenn man statt der Resultirenden R die R, und statt der dortigen Function U unsere jetzige substituirt, und in gleicher Weise sind die in den §§. 7 bis 9 abgeleiteten analytischen Beziehungen zur Berechnung der fördernden und drehenden Componenten des physischen Druckes auch im jetzigen Falle noch unverändert anzuwenden.

Endlich will ich noch die Bemerkung beifügen, obgleich dieselbe schon in unserem allgemeinsten Begriffe des Gleichgewichtes enthalten ist, daß für eine gleichförmige geradlinige äußere Bewegung die vorhergehenden Beziehungen auf die frühern für äußeres Gleichgewicht zurückkommen, mit dem Unterschiede jedoch, daß das innere Gleichgewicht nur dann ein dauerndes sein kann, wenn die Componenten X, Y, Z von der äußern Lage unabhängig bleiben. Im entgegengesetzten Falle wird ein bestimmter innerer Gleichgewichtszustand je nur einem bestimmten Orte des beweglichen Anfangspunktes entsprechen.

§. 23.

Um einige einfache Anwendungen von den vorhergehenden Erörterungen zu geben, wollen wir eine homogene, schwere tropfbare Flüssigkeit betrachten und zuerst annehmen, daß das Gefäß, in welchem sie enthalten ist, eine verticale aufsteigende oder sinkende Bewegung erhalte, deren Gesetz zunächst noch ein beliebiges sei, so daß man habe

$$z = f(t)\;,\quad \frac{dz}{dt} = f'(t) = \varphi_1(z)\;,\quad \frac{d^2z}{dt^2} = f''(t) = \varphi_2(z)\;.$$

Die Differentialgleichung der Niveauflächen wird dann, wenn

$$X = Y = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = 0\;,\qquad Z = g$$

gesetzt wird, wie früher einfach

$$\frac{dz}{ds} = 0 \quad ;$$

die Niveauflächen sind also für jede Function $\varphi_2(s)$ wie beim äußern Gleichgewicht horizontale Ebenen.

Der geometrische Druck P dagegen wird von s abhängig; es können daher die verschiedenen Niveauflächen nur dann im gegenseitigen ruhenden Gleichgewichtszustand verharren, wenn die Flüssigkeit vollständig unzusammendrückbar, oder die Dichte vom Druck vollständig unabhängig ist. Für eine solche Flüssigkeit hat man dann

$$P = P_0 + q\,[g - \varphi_2(s)]\,(z - z_0) \quad ,$$

und es besteht darin für jede Form der Function $\varphi_2(s)$ dauerndes inneres Gleichgewicht.

Der zunächst liegende Fall dieser Art ist der, wo die Beschleunigung $\varphi_2(s)$ constant und $= \pm c$ ist, das die Flüssigkeit enthaltende Gefäß also eine fallende oder steigende gleichförmig veränderte Bewegung besitzt. Man kann diesen Fall dadurch herbeiführen, daß man jenes Gefäß durch einen Faden oder ein Band mit einem Gewichte Q verbindet und beide an einer Rolle mit horizontaler Achse aufhängt. Bezeichnet dann W das Gewicht des Gefäßes und der Flüssigkeit, und nimmt man von Reibung, Luftwiderstand und sonstigen Bewegungswiderständen Umgang, so ergibt sich für das Gefäß die Beschleunigung:

$$c = g\,\frac{W - Q}{W + Q} \quad ,$$

welche positiv oder negativ sein wird, je nachdem W größer oder kleiner als Q ist. Man hat daher für beide Arten von äußerer Bewegung

$$P = P_0 + g\,q\,(z - z_0)\left(1 - \frac{W - Q}{W + Q}\right)$$

$$= P_0 + p\,(z - z_0)\,\frac{2\,Q}{W + Q}$$

und zieht daraus folgende Schlüsse:

1) Wenn $Q = 0$ und $c = g$ ist, das Gefäß also frei herabfällt, so hat man $P = P_0$; die Flüssigkeit ist also relativ gewichtlos und übt keinen Druck, weder auf die untern Schichten noch auf das Gefäß aus.

2) Ist $Q > 0$ und $< W$, und daher c noch positiv, so ist der geometrische Druck immer kleiner, als beim äußeren Gleichgewicht, und er wird diesem gleich, wenn $Q = W$, $c = 0$ geworden ist, das Gefäß also sich gleichförmig bewegt.

3) Wird dann $Q > W$ und c negativ, so wird der Druck P größer, als beim äußern Ruhezustand; er kann aber niemals den Werth: $P = P_0 + 2p(z - z_0)$ erreichen, da dazu $Q = \infty$ werden müßte; es kann also bei unserer Vorrichtung der von der Flüssigkeit allein herrührende Druck $P - P_0$ niemals doppelt so groß werden, als beim äußern Gleichgewichtszustand; es könnte dieß nur dann stattfinden, wenn dem Gefäß durch eine andere Ursache eine aufwärts gerichtete Beschleunigung $c = g$ ertheilt würde.

Als zweiten Fall wollen wir annehmen, daß das Gefäß auf einer horizontalen Ebene geradlinig bewegt werde, und zwar so, daß man habe

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \varphi_2(x) \quad , \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{d^2 z}{d t^2} = 0 \quad .$$

Unter dieser Voraussetzung wird

$$\frac{dU}{ds} = g \frac{dz}{ds} - \varphi_2(x) \frac{dx}{ds} = 0 \quad ,$$

und die Gleichung der Niveauflächen hat die Form:

$$g z - x \varphi_2(x) = C \quad ;$$

diese Flächen sind demnach wieder Ebenen, deren Neigung gegen die horizontale aber von der Function $\varphi_2(x)$ abhängt; es kann daher im jetzigen Falle nur dann ein dauerndes inneres Gleichgewicht bestehen, wenn die Beschleunigung $\varphi_2(x)$ constant, also $= c$ ist. Vergleicht man dann die daraus entstehende Gleichung:

$$g z - c x = C$$

mit der allgemeinen Gleichung der Ebene:

$$x \cos\lambda + y \cos\mu + z \cos\nu = h \quad ,$$

worin h die Länge der vom Anfangspunkt der $x y z$ auf die betreffende Ebene gefällten Senkrechten bedeutet, so findet man

$$\cos\mu = 0 \; , \quad C = k h \; , \quad \cos\lambda = - \sin\nu = - \frac{c}{k} \; , \quad \cos\nu = \frac{g}{k} \; ;$$

die Niveau-Ebenen stehen demnach auf der Richtung der äußeren Bewegung senkrecht und ihre Normale macht mit der x-Achse den Winkel $\frac{1}{2}\pi + \nu = \frac{1}{2}\pi + arc\ tang\ \frac{c}{g}$, die Ebenen selbst sind also auf der Seite, nach welcher die Bewegung gerichtet ist, abwärts geneigt (Fig. 9.). Wenn $c = g$ wird, so wird diese Neigung $= \frac{1}{4}\pi$.

Für den geometrischen Druck ergibt sich darnach der Werth:

$$P = P_0 + q\,(g\,z - c\,x - C)$$
$$= P_0 + q\,k\,(z \cos\nu - x \sin\nu - h_0)\ ,$$

worin sich h_0 auf diejenige Niveaufläche bezieht, in welcher der geometrische Druck $= P_0$ ist, also auf die Spiegelfläche, wenn P_0 den atmosphärischen Druck vorstellt. Ersetzt man dann unter letzterer Annahme k durch $g \sec\nu$, $q\,g$ wieder durch p, und beachtet, daß nun $z \cos\nu - x \sin\nu - h_0$ den senkrechten Abstand $CP = z_,$ einer Niveaufläche MN vom Spiegel AB, Fig. 9, ausdrückt, und daß $z_, \sec\nu$ die Entfernung $QC = z'$ eines Punktes Q dieser Niveaufläche von dem in derselben Verticalen liegenden Punkte C der Spiegelfläche ist, so folgt

$$P = P_0 + p\,z_, \sec\nu = P_0 + p\,z'\ ,$$

und man schließt daraus, daß im jetzigen Falle der geometrische Druck P in derselben Verticalen vom Spiegel an ganz in derselben Weise zunimmt, wie beim äußeren ruhenden Zustand. Der geometrische Druck auf einen horizontalen Boden ist demnach nicht mehr in allen Punkten desselben constant, aber der von der Flüssigkeit allein herrührende physische Druck auf denselben ist immer noch gleich dem Gewichte der vertical darüber stehenden Flüssigkeitssäule, und man wird nach dem vorstehenden Werthe von P leicht einsehen, daß auch die Componenten $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$, $\mathfrak{P}_z$ des physischen Druckes auf irgend einen Theil einer beliebig gestalteten Gefäßwand wie früher berechnet werden können, wenn man die Spiegelfläche als Ebene der $x_, y_,$, die $y_,$-Achse senkrecht zur Richtung der äußern Bewegung annimmt und in den Formeln (38) und (39) $p \sec\nu$ für p setzt.

Die beiden vorher betrachteten Fälle bilden gleichsam die Grenzen des allgemeinen Falles, wo das Gefäß sich nach einer geneigten Geraden bewegt, wobei wir jedoch sogleich eine constante Beschleunigung annehmen wollen, da leicht einzusehen ist, daß nur bei dieser dauerndes inneres Gleichgewicht stattfinden kann. Legen wir dann die Ebene der xz durch

die Richtung der Bewegung, nehmen die z-Achse wieder vertical an und bezeichnen die Beschleunigung in der Richtung der Bewegung mit c und den Winkel, welchen diese Richtung mit der x-Achse macht, mit γ, so haben wir

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = c \cos\gamma \quad , \qquad \frac{d^2 z}{d t^2} = c \sin\gamma \quad , \qquad \frac{d^2 y}{d t^2} = 0 \quad ,$$

und die Gleichung (47) nimmt die Form an:

$$(g - c \sin\gamma) \frac{d z}{d s} - c \cos\gamma \frac{d x}{d s} = 0 \quad ;$$

Die Gleichung der Niveauflächen ist demnach

$$(g - c \sin\gamma)\, z - c\, x \cos\gamma = C \quad ;$$

diese Flächen sind wieder Ebenen, und der Winkel ν, welchen die Normale derselben mit der z-Achse bildet, ergibt sich durch die Gleichung:

$$\operatorname{tang} \nu = \frac{c \cos\gamma}{g - c \sin\gamma} \quad .$$

Man schließt daraus, wenn $c = g \sin\gamma$ wird, das Gefäß also ohne Widerstand mit der ganzen Fallbeschleunigung abwärts gleitet,

$$\operatorname{tang} \nu = \frac{\sin\gamma \cos\gamma}{1 - \sin^2\gamma} = \operatorname{tang}\gamma \quad , \qquad \nu = \gamma \quad ;$$

jede Niveaufläche, also auch die Spiegelfläche ist dann parallel zur Richtung der Bewegung. Für jede kleinere äußere Beschleunigung dagegen ist der Spiegel weniger gegen die horizontale geneigt, als die genannte Richtung.

Als Werth des geometrischen Druckes hat man allgemein

$$P - P_0 = q\, [(g - c \sin\gamma)\, z - c\, x \cos\gamma - C] \, ,$$

oder wenn $g - c \sin\gamma = k \cos\nu$, $c \cos\gamma = k \sin\nu$, $C = k h_0$ gesetzt wird, wie oben im Falle der horizontalen Bewegung,

$$\begin{aligned} P - P_0 &= q k\, (z \cos\nu - x \sin\nu - h_0) \\ &= p \left(1 - \frac{c \sin\gamma}{g}\right) (z \cos\nu - x \sin\nu - h_0) \sec\nu \\ &= p \left(1 - \frac{\sin^2\nu}{\cos(\nu - \gamma)}\right) z_1 \sec\nu \end{aligned}$$

Für den besondern Fall: $\nu = \gamma$ wird daher

$$P - P_0 = p z, \cos \nu \quad ,$$

und der geometrische Druck ist dann bei gleicher normaler Tiefe unter der Spiegelfläche im Verhältniß: 1 : $\cos \nu$ kleiner, als bei äußerem Gleichgewicht. Weitere besondere Folgerungen daraus zu ziehen, soll dem Leser überlassen bleiben.

Schließlich dürfte noch zu erwähnen sein, daß wenn das Gefäß sich in irgend einer krummen Linie bewegt, ohne sich zu drehen, also so, daß die in demselben angenommenen Coordinaten-Achsen immer parallel bleiben, die augenblickliche Niveaufläche immer eine Ebene sein wird; denn aus der Gleichung:

$$\left(g - \frac{d^2 \mathfrak{z}}{d t^2}\right) \frac{d z}{d s} - \frac{d^2 \mathfrak{x}}{d t^2} \frac{d x}{d s} - \frac{d^2 \mathfrak{y}}{d t^2} \frac{d y}{d s} = 0 \quad ,$$

in welcher $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ von x, y, z unabhängig sind, folgt für die Niveaufläche die Form:

$$\left(g - \frac{d^2 \mathfrak{z}}{d t^2}\right) z - \frac{d^2 \mathfrak{x}}{d t^2} x - \frac{d^2 \mathfrak{y}}{d t^2} y = f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) \quad ,$$

welche für jeden Werth von $\mathfrak{x}$, durch welchen auch die entsprechenden Werthe von $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ mittels der Gleichungen der Bahn des Gefäßes sich bestimmen, die Gleichung einer Ebene ist. Ruhendes oder dauerndes inneres Gleichgewicht wird aber nur für dasjenige Gesetz der äußern Bewegung in einer bestimmten Curve stattfinden, welches aus den Bedingungen:

$$\frac{d^2 \mathfrak{x}}{d t^2} = c_1 \quad , \quad \frac{d^2 \mathfrak{y}}{d t^2} = c_2 \quad , \quad \frac{d^2 \mathfrak{z}}{d t^2} = c_3$$

hervorgeht, welches also als die Folge einer der Größe und Richtung nach constanten Kraft betrachtet werden, und das nach dem Lehrsatz von der lebendigen Kraft allgemein durch

$$\mathfrak{v}^2 = \mathfrak{v}_0^2 + 2 \int_{s_0}^{s} d s \left(c_1 \frac{d \mathfrak{x}}{d s} + c_2 \frac{d \mathfrak{y}}{d s} + c_3 \frac{d \mathfrak{z}}{d s}\right)$$
$$= \mathfrak{v}_0^2 + 2 c_1 (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) + 2 c_2 (\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0) + 2 c_3 (\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0)$$

dargestellt werden kann. Man sieht übrigens leicht, daß dieses Gesetz

für jede andere Linie, als eine Gerade, ein ziemlich complicirtes wird, welches weder in der Natur vorkommt, noch durch eine einfache künstliche Einrichtung zu erreichen sein dürfte; wir wollen deßhalb auch nicht länger dabei verweilen.

§. 24.

Um das innere Gleichgewicht eines flüssigen Systems zu untersuchen, welches eine äußere fortschreitende und drehende Bewegung besitzt, muß man von den Gleichungen (99) in §. 45 des dritten Buches ausgehen und darin nach den frühern Erörterungen

$$S_\xi = S_\eta = S_\zeta = 0 \quad , \qquad T_\xi = T_\eta = T_\zeta = - P$$

setzen, ferner die innern Geschwindigkeiten $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\xi}{dt}$ und natürlich auch die rechten Seiten dieser Gleichungen, die Aenderungsgesetze der innern Geschwindigkeiten, gleich Null nehmen. Ebenso wird man mit den Gleichungen (100) daselbst verfahren, wenn die äußere Bewegung nur in einer Drehung um eine feste Achse besteht, welche als ζ-Achse genommen wird.

Gehen wir so zuerst auf den letztern Fall näher ein, so finden wir die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP}{d\xi} &= q\left(\Xi + \eta\frac{d\varphi}{dt} + \xi\varphi^2\right) , \\ \frac{dP}{d\eta} &= q\left(H - \xi\frac{d\varphi}{dt} + \eta\varphi^2\right) , \\ \frac{dP}{d\zeta} &= q\,Z , \end{aligned}\right\} \qquad (49.$$

worin Ξ, H, Z die Componenten der äußern geometrischen Kraft R parallel zu den sich drehenden Achsen der ξ und η und der festen der ζ bezeichnen und φ die augenblickliche äußere Winkelgeschwindigkeit des Systems ist, und schließen daraus für das innere Gleichgewicht die Bedingung, daß die Größen:

$$q\left(\Xi + \eta\frac{d\varphi}{dt} + \xi\varphi^2\right) , \quad q\left(H - \xi\frac{d\varphi}{dt} + \eta\varphi^2\right) \text{ und } q\,Z$$

die partiellen Aenderungsgesetze einer Function: $F(\xi, \eta, \zeta)$ je nach ξ, η und ζ allein sein müssen, daß man also haben muß:

$$q\left[\left(\Xi+\eta\frac{d\varphi}{dt}+\xi\varphi^2\right)\frac{d\xi}{ds}+\left(H-\xi\frac{d\varphi}{dt}+\eta\varphi^2\right)\frac{d\eta}{ds}+Z\frac{d\zeta}{ds}\right]=\frac{dF}{ds}.$$

Daraus folgen dann wieder die besondern Bedingungen:

$$50.)\quad \begin{cases} \left(\Xi+\eta\frac{d\varphi}{dt}+\xi\varphi^2\right)\frac{d\xi}{ds}+\left(H-\xi\frac{d\varphi}{dt}+\eta\varphi^2\right)\frac{d\eta}{ds} \\ \qquad +Z\frac{d\zeta}{ds}=\frac{dY}{ds}=\frac{df(\xi,\eta,\zeta)}{ds}, \\ q=\varphi'[f(\xi,\eta,\zeta)]=\varphi'(Y), \end{cases}$$

und die Differentialgleichung der Niveauflächen wird

$$51.)\quad \left(\Xi+\eta\frac{d\varphi}{dt}+\xi\varphi^2\right)\frac{d\xi}{ds}+\left(H-\xi\frac{d\varphi}{dt}+\eta\varphi^2\right)\frac{d\eta}{ds}+Z\frac{d\zeta}{ds}=0.$$

In allen diesen Gleichungen sind die Componenten Ξ, H, Z im allgemeinen Functionen von den rechtwinkligen Coordinaten ξ, η, ζ oder von den Cylinder-Coordinaten ζ, r und ω, und die Winkelgeschwindigkeit φ so wie die Winkelbeschleunigung $\frac{d\varphi}{dt}$ können immer in Function von ω ausgedrückt werden, wenn das Gesetz der drehenden Bewegung bekannt ist; daraus folgt dann für das dauernde Gleichgewicht noch die weitere Bedingung, daß der Winkel ω in den Functionen: $\Xi+\eta\frac{d\varphi}{dt}+\xi\varphi^2$, $H-\xi\frac{d\varphi}{dt}+\eta\varphi^2$ und Z verschwinden muß, damit die Lage und Gestalt der Niveauflächen von der äußern Lage des Systems unabhängig bleibt.

Für die Berechnung des geometrischen und physischen Druckes bestehen der Form nach ganz dieselben Beziehungen, wie früher; man hat nämlich für den Fall, daß $q=\varphi'(Y)$ in Function von ξ, η, ζ gegeben ist,

$$52^a.)\quad \frac{dP}{ds}=\varphi'(Y)\frac{dY}{ds}, \quad P=P_0+\varphi(Y)-\varphi(Y_0),$$

und wenn q als eine Function von P gegeben ist,

$$\frac{dP}{ds} = \psi'(P)\,\frac{dY}{ds}\;, \qquad Y = Y_0 + \int_{P_0}^{P} dP \cdot \frac{1}{\psi'(P)} \;. \quad (52^b.$$

Zu den Bemerkungen am Ende des §. 22 ist dann für den jetzigen Fall noch beizufügen, daß sich in den Bedingungen für das innere Gleichgewicht unseres flüssigen Systems nichts ändert, wenn die Drehungsachse, anstatt fest zu sein, eine gleichförmige geradlinige Bewegung besitzt und dabei immer zu ihrer ursprünglichen Richtung parallel bleibt; das Gleichgewicht wird aber wieder nur ein dauerndes sein, wenn die Kräfte Ξ, H, Z und das Gesetz der äußern drehenden Bewegung um die Achse von jener fortschreitenden Bewegung unabhängig bleiben.

§. 25.

Als einfachster Fall für das innere Gleichgewicht eines um eine feste Achse sich drehenden flüssigen Systems werde zuerst angenommen, daß sich eine homogene schwere tropfbare Flüssigkeit um eine verticale Achse drehe. Man hat dann $\Xi = H = 0$, $Z = -g$, die ζ oder z nach oben positiv vorausgesetzt, und die Differential-Gleichung der Niveauflächen oder der Spiegelfläche wird damit

$$\left(\xi\varphi^2 + \eta\,\frac{d\varphi}{dt}\right)\frac{d\xi}{ds} + \left(\eta\varphi^2 - \xi\,\frac{d\varphi}{dt}\right)\frac{d\eta}{ds} - g\,\frac{d\zeta}{ds} = 0\,.$$

Es ist aber sogleich ersichtlich, daß diese Fläche keine von der Zeit unabhängige Form haben kann, wenn nicht die Winkelgeschwindigkeit φ selbst von der Zeit unabhängig oder constant ist, da dieselbe nicht von ξ und η abhängen kann; es muß demnach $\frac{d\varphi}{dt}$ Null werden, und man findet so als Gleichung der Spiegelfläche:

$$(\xi^2 + \eta^2)\,\varphi^2 - 2g\,\zeta = C \quad , \qquad (a.$$

d. i. die Gleichung eines Umdrehungsparaboloids, dessen Achse mit der z-Achse zusammenfällt. Ersetzt man $\xi^2 + \eta^2$ durch r^2, so geht daraus die Gleichung der erzeugenden Parabel in der Form:

$$r^2 = \frac{2g}{\varphi^2}\,(\zeta - h_0)$$

hervor, und es handelt sich nun darum, die Constante C oder h_0 für gegebene Fälle zu bestimmen.

Ist die Flüssigkeit z. B. in einem cylindrischen Gefäße mit ebener kreisförmiger Grundfläche vom Halbmesser R enthalten, und würde sie dasselbe im ruhenden Zustande bis zur Höhe h füllen, so beträgt das Volumen derselben $\pi R^2 h$ Raumeinheiten. Nehmen wir dann den Boden des Gefäßes als $\xi\eta$-Ebene, so wird h_0 der Abstand des Scheitels der Parabel oder des Paraboloids von diesem Boden sein, und die Höhe H, bis zu welcher die Flüssigkeit während der Bewegung ansteigt, ergibt sich aus der Gleichung:

$$R^2 = \frac{2g}{\varphi^2}(H - h_0) \quad , \qquad H = h_0 + \varphi^2 \frac{R^2}{2g} \quad .$$

Der Rauminhalt des hohlen Paraboloids vom Scheitel bis zur Höhe $H - h_0$ ist aber nach §. 64 des zweiten Buches $= \pi \frac{g}{\varphi^2}(H - h_0)^2$ oder $\frac{1}{2}\pi R^2 (H - h_0)$; es bleibt also als Rauminhalt der Flüssigkeit:

$$\pi R^2 H - \frac{1}{2}\pi R^2 (H - h_0) = \frac{1}{2}\pi R^2 (H + h_0) \quad ,$$

und man schließt daraus durch Vergleichung mit dem obigen Inhalt

$$h = \frac{1}{2}(H + h_0) \quad ;$$

d. h. es steigt die Flüssigkeit an der Wand des Gefäßes gerade so hoch über den ursprünglichen Spiegel, als der Scheitel des parabolischen Trichters unter denselben sinkt. Ferner folgt daraus

$$H + h_0 = 2h = 2h_0 + \frac{\varphi^2 R^2}{2g} \quad , \qquad H - h = \frac{\varphi^2 R^2}{4g} = h - h_0 \quad ,$$

und der Halbmesser des Trichterschnittes mit der ursprünglichen ebenen Spiegelfläche ergibt sich $= \frac{1}{2} R \sqrt{2}$. Diese Werthe gelten indessen nur so lange, als $h > \frac{\varphi^2 R^2}{4g}$ und die Höhe der Gefäßwand $> 2h$, weil im entgegengesetzten Falle der Trichter den Boden erreicht und die Flüssigkeit über den obern Rand des Gefäßes hinaussteigt und austritt.

Für den geometrischen Druck der Flüssigkeit in dem ebenbetrachteten Falle folgt aus (52^a) der Werth:

$$P = P_0 + q \int_{s_0}^{s} ds \left[\varphi^2 \left(\xi \frac{d\xi}{ds} + \eta \frac{d\eta}{ds} \right) - g \frac{d\zeta}{ds} \right]$$

$$= P_0 + \frac{1}{2} q \varphi^2 (\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{2} q \varphi^2 (\xi_0^2 + \eta_0^2) - q g (\zeta - \zeta_0) ;$$

im Scheitel des Trichters hat man aber $\xi_0 = \eta_0 = 0$, $\zeta_0 = h_0$, $P = P_0$, wenn P_0 den atmosphärischen Druck bezeichnet, und damit folgt einfach

$$P = P_0 + \frac{1}{2} q \varphi^2 r^2 + q g (h_0 - \zeta)$$

$$= P_0 + p \left(h_0 - \zeta + \frac{\varphi^2 r^2}{2g} \right) .$$

In jedem horizontalen Schnitt ist demnach der Druck in der Achse am kleinsten, wächst gegen die Wand hin wie das Quadrat der Entfernung von der Achse und ist an der cylindrischen Wand durchaus um $p \frac{\varphi^2 R^2}{2g}$ größer, als in der Achse. Geht der Schnitt durch den Trichter, so kann natürlich von einem Druck in der Achse keine Rede sein, und der vorhergehende Ausdruck deutet dieß dadurch an, daß $P - P_0$ dort negativ würde. Am Boden des Gefäßes ist der geometrische Druck

$$P - P_0 = p \left(h_0 + \frac{1}{2} \varphi^2 \frac{r^2}{g} \right) ;$$

für den von der Flüssigkeit allein ausgeübten physischen Druck $\mathfrak{P}_z$ auf die ganze Bodenfläche hat man daher

$$\mathfrak{P}_z = p \left(\pi h_0 R^2 + \frac{\varphi^2}{2g} \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R dr \, . \, r^3 \right)$$

$$= p \left(\pi h_0 R^2 + \frac{\varphi^2}{4g} \pi R^4 \right) = \pi p R^2 \left(h_0 + \frac{\varphi^2 R^2}{4g} \right) .$$

Dieser Ausdruck kommt aber mit dem obigen Werthe von h_0 auf

$$\mathfrak{P}_z = \pi p h R^2$$

zurück und spricht so aus, daß der physische Druck auf die Bodenfläche

auch im jetzigen Falle noch dem Gewichte der darüberstehenden Flüssigkeit gleich ist.

Denkt man sich dagegen das Gefäß im ruhenden Zustande unmittelbar über dem Spiegel der Flüssigkeit geschlossen und dann in eine gleichförmig rotirende Bewegung gesetzt, so bleibt die Form äußerlich zwar ungeändert, die Niveauflächen nehmen aber doch die vorhergehende konoidische Form an, und auch für den geometrischen Druck bleibt der obige Werth gültig, nur mit dem Unterschied, daß nun $h_0 = h$ bleibt; es wird daher im jetzigen Falle der physische Druck auf den Boden

$$\mathfrak{P}_z = \pi p R^2 h \left(1 + \frac{\varphi^2 R^2}{4gh}\right) \quad ,$$

also wesentlich größer, als das Gewicht der darüberstehenden Flüssigkeit, wenn die Umfangsgeschwindigkeit φ R nicht sehr klein ist.

Setzen wir nun die Drehungsachse horizontal voraus, und vertauschen dazu in unseren allgemeinen Gleichungen die η und ζ, damit die Drehungsachse als η-Achse genommen werden kann, und bezeichnen wir den Winkel zwischen der beweglichen ζ-Achse und der festen verticalen z-Achse am Ende der Zeit t mit ω, so wird $H = 0$, $Z = -g \cos\omega$, $\Xi = g \sin\omega$; die Differentialgleichung der Niveauflächen nimmt damit die Form an:

$$0 = \left(\varphi^2 \xi - \zeta \frac{d\varphi}{dt} + g \sin\omega\right) \frac{d\xi}{ds} + \left(\varphi^2 \zeta + \xi \frac{d\varphi}{dt} - g \cos\omega\right) \frac{d\zeta}{ds}$$

und gibt durch Integration die Gleichung einer Cylinderfläche:

$$C = \frac{1}{2} \varphi^2 (\xi^2 + \zeta^2) + g (\xi \sin\omega - \zeta \cos\omega) \quad ,$$

welche offenbar nicht von ω unabhängig werden kann, ob man φ constant annimmt oder als eine Function von ω; in unserem jetzigen Falle ist demnach kein dauernder Gleichgewichtszustand möglich. Läßt man aber die erstere Annahme zu, so wird man leicht einsehen, daß die obige Gleichung der Niveauflächen in Bezug auf die festen Coordinatenachsen der x und z unabhängig von ω ausgedrückt werden kann; denn man hat

$$\xi^2 + \zeta^2 = r^2 = x^2 + z^2 \quad , \qquad \zeta \cos\omega - \xi \sin\omega = z \quad ,$$

und es nimmt damit jene Gleichung die einfache Form an:

$$C = \frac{1}{2}\varphi^2(x^2+z^2) - gz \ .$$

Die Achse dieser Fläche fällt darnach nicht mit der Drehungsachse zusammen, sondern liegt um $\frac{g}{\varphi^2}$ Längeneinheiten vertical über derselben, wie man sich durch Verlegung der y=Achse leicht überzeugen wird.

Ist also A,- Fig. 10, die horizontale Achse, um welche sich das die schwere Flüssigkeit enthaltende Gefäß B gleichförmig bewegt, und macht man $AC = \frac{g}{\varphi^2}$, so wird in der Lage B der von C aus beschriebene Kreisbogen ab, in der Lage B′ der von demselben Mittelpunkt aus beschriebene Bogen a′ b′ die cylindrische Spiegelfläche der Flüssigkeit vorstellen. Die Constante C in der vorhergehenden Gleichung hängt daher im jetzigen Falle theils von der Lage des Gefäßes oder von dem Winkel ω, und theils von der in dem Gefäß enthaltenen Flüssigkeitsmenge ab. Die weitere Untersuchung dieses für die oberschlächtigen Wasserräder wichtigen Falles und insbesondere des von der Flüssigkeit auf die Gefäßwände ausgeübten Druckes muß der dritten Abtheilung unseres Werkes vorbehalten werden.

§. 26.

Nach den in §. 24 entwickelten Gesetzen können wir nun die auf der Erde stattfindenden Verhältnisse in ihrer ursprünglichen Beschaffenheit untersuchen, indem wir nämlich die Erde als rotirend und die anziehende Wirkung derselben auf die Flüssigkeitstheilchen unabhängig von dieser Rotation betrachten, während wir früher in Abtheilung I des gegenwärtigen Abschnittes die Erde als ruhend angenommen und unter der Fallbeschleunigung g die durch die Beobachtung gegebene, durch die Umdrehung der Erde verminderte Fallbeschleunigung verstanden haben.

Gehen wir zunächst von der einfachen Annahme aus, daß die beschleunigende Wirkung, welche von dem Erdkörper auf ein Flüssigkeitstheilchen des die ganze Erde überfluthenden und mit ihr gleichförmig um eine feste Achse rotirenden Meeres ausgeübt wird, der Entfernung von einem bestimmten Punkte der Umdrehungsachse proportional und immer gegen diesen Punkt gerichtet sei, nehmen diesen Punkt als Anfangspunkt der ξ, η, ζ, die Umdrehungsachse als ζ=Achse, so haben wir

$$\Xi = -k\xi \quad , \quad H = -k\eta \quad , \quad Z = -k\zeta \quad ;$$

die Differential-Gleichung (51) der Niveauflächen wird demnach

$$(k-\varphi^2)\left(\xi\frac{d\xi}{ds}+\eta\frac{d\eta}{ds}\right)+k\zeta\frac{d\zeta}{ds}=0$$

und gibt für diese Flächen die Form:

$$k\zeta^2+(k-\varphi^2)(\xi^2+\eta^2)=C \quad ,$$

welche, wie leicht zu sehen, ein Umdrehungs-Ellipsoid darstellt, wenn $k > \varphi^2$, und ein Umdrehungs-Hyperboloid im entgegengesetzten Falle, und zwar je nachdem C positiv oder negativ ist, eines mit zwei, oder eines mit einem Mantel.

Im ersten Falle sind $2\sqrt{\frac{C}{k}}$ und $2\sqrt{\frac{C}{k-\varphi^2}}$ die Längen der Umdrehungsachse und des Aequatordurchmessers; das Ellipsoid ist also jedenfalls ein abgeplattetes, das Verhältniß der beiden genannten Linien ist unabhängig von der Constanten C und gleich $\sqrt{\frac{k}{k-\varphi^2}}$, und die Größe der Abplattung ist $1-\sqrt{\frac{k-\varphi^2}{k}}$; alle Niveauflächen sind folglich ähnliche Umdrehungs-Ellipsoide. Um darnach die Gestalt unserer Meeresfläche zu bestimmen, muß zunächst der Werth von k aus der Fallbeschleunigung an der Oberfläche der in Ruhe gedachten Erde der obigen Annahme: $\Xi = -k\xi$, etc. gemäß bestimmt werden. Dazu bezeichne g_0 die wirkliche Fallbeschleunigung am Aequator, R_0 dessen Halbmesser und G_0 die ohne die drehende Bewegung der Erde daselbst stattfindende Beschleunigung; ferner sei g_1 die für die ruhende wie für die sich drehende Erde gleich bleibende Fallbeschleunigung an den Polen, R_1 die halbe Länge der Erdachse; man hat dann zuerst (I. Buch, §§. 97 und 104)

$$G_0 = g_0 + R_0\varphi^2 = g_0\left(1+\frac{R_0\varphi^2}{g_0}\right) = 1{,}003467\, g_0 \quad ,$$

$$g_1 = 1{,}005188\, g_0 \quad ,$$

und nach der gemachten Voraussetzung müßte sein

$$G_0 = kR_0 \qquad \text{und} \qquad g_1 = kR_1 \quad .$$

In jedem Falle ist also bei der Erde der Werth von k weit größer als φ^2 und demnach die Bedingung für ein Umdrehungsellipsoid erfüllt; die aus den obigen Formeln zu folgernden Verhältnisse weichen aber von den bei der Erde statthabenden wesentlich ab; denn darnach hätte man

$$\frac{R_0}{R_1} = \frac{G_0}{g_1} = \frac{g_0 + R_0 \varphi^2}{g_1} = \sqrt{\frac{k}{k - \varphi^2}} \;.$$

Nehmen wir nun den Werth von $k = \frac{G_0}{R_0} = \frac{g_0 + R_0 \varphi^2}{R_0}$ und führen ihn in den letzten Ausdruck ein, so gibt er mit dem vorletzten verglichen

$$\frac{g_0 + R_0 \varphi^2}{g_1} = \sqrt{\frac{g_0 + R_0 \varphi^2}{g_0}} \;,$$

$$g_1 = \sqrt{g_0 (g_0 + R_0 \varphi^2)} = \sqrt{G_0 g_0} = g_0 \sqrt{1 + \frac{R_0 \varphi^2}{g_0}} = 1{,}00173 \, g_0 \;;$$

es müßte demnach die Fallbeschleunigung am Pol die mittlere geometrische Proportionale sein zwischen den Fallbeschleunigungen am Aequator der sich drehenden und der sich nicht drehenden Erde; die Aenderung dieser Beschleunigung vom Aequator bis zum Pol der sich drehenden Erde dürfte nur $0{,}00173 \, g_0$ betragen, während sie in Wirklichkeit $0{,}005188 \, g_0$, also das dreifache beträgt, und die Abplattung dürfte ebenfalls nur

$$1 - \sqrt{\frac{k - \varphi^2}{k}} = 1 - \sqrt{1 - \frac{R_0 \varphi^2}{g_0}} = 0{,}00173$$

sein, während sie in Wirklichkeit nahe das doppelte ist.

Bevor wir indessen zu einer andern Voraussetzung hinsichtlich der Kräfte Ξ, H und Z übergehen, dürfte es für die rationelle Betrachtung nicht ohne Interesse sein, auch den zweiten der obigen Fälle zu betrachten, wo die Niveauflächen die Gestalt von Umdrehungshyperboloiden annehmen. Dazu ist uns aber die Kenntniß des geometrischen Druckes in der Flüssigkeit nothwendig, und die Gleichung (52^a) gibt uns für diesen mit den obigen Werthen von Ξ, H, Z und für ein constantes q den Ausdruck:

$$P = P_0 - \frac{q}{2} k (\zeta^2 - \zeta_0^2) - \frac{q}{2} (k - \varphi^2) (r^2 - r_0^2) \;,$$

worin r^2 für $\xi^2 + \eta^2$ steht, und ζ_0 und r_0 die Coordinaten eines Punktes bezeichnen, in welchem $P = P_0$ ist. Hat man also $k > \varphi^2$ und sind die Niveauflächen Umdrehungs-Ellipsoide, und setzt man $\zeta_0 = r_0 = 0$, so daß P_0 den Druck in dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte dieser Flächen bedeutet, so wird einfacher

$$P = P_0 - \frac{q}{2} k \zeta^2 - \frac{q}{2} (k - \varphi^2) r^2 \quad ,$$

und es ist eine geschlossene Niveaufläche denkbar, in welcher der Druck $P = 0$ ist, nämlich diejenige, für welche man hat

$$q k \zeta^2 + q (k - \varphi^2) r^2 = 2 P_0 \quad .$$

Unter den obigen Voraussetzungen: $\Xi = -k\xi$, u. s. f., $k > \varphi^2$ kann demnach eine Flüssigkeitsmasse ganz frei, ohne äußern Druck*) in der Form eines Umdrehungs-Ellipsoides als rotirender und abgeplatteter Tropfen bestehen; der Druck ist im Mittelpunkt am größten und nimmt nach außen von einer Niveaufläche zur andern ab, und die Voraussetzung $\Xi = -k\xi$, etc. stimmt wenigstens angenähert mit der Natur der Sache überein.

Nehmen wir dagegen $\varphi^2 > k$ und wie vorher $r_0 = \zeta_0 = 0$ und P_0 positiv, so wird

$$P = P_0 + \frac{q}{2} (\varphi^2 - k) r^2 - \frac{q}{2} k \zeta^2 \quad ;$$

für $\zeta = 0$ wächst demnach P mit r^2, und es ist kein Werth für r denkbar, für welchen $P = 0$ würde; dasselbe ist noch der Fall, so lange $q k \zeta^2 < 2 P_0$, und wenn $q k \zeta^2 > 2 P_0$, so wird P negativ, so lange $q (\varphi^2 - k) r^2 < q k \zeta^2 - 2 P_0$, und für $q (\varphi^2 - k) r^2 - q k \zeta^2 = -2 P_0$ wird $P = 0$; die Flüssigkeit muß demnach in diesem Falle, wenn kein äußerer Druck vorhanden ist, zwischen festen Wänden eingeschlossen sein, welche nahezu parallel zur Umdrehungsachse sind, und wird in der Richtung dieser Achse selbst von zwei hohlen hyperbolischen Trichtern, einem Umdrehungs-Hyperboloid mit zwei Mänteln, begrenzt (Fig. 11). Man wird sich ferner leicht überzeugen, daß in der Asymptoten-Regelfläche $P = P_0$, daß zwischen der Regelfläche und der Umdrehungsachse $P < P_0$, und zwischen der Regelfläche und der Aequator-Ebene $P > P_0$ ist, daß

*) Insofern die Flüssigkeit ohne äußern Druck in der tropfbar-flüssigen Form verharrend gedacht wird.

daher die Asymptoten-Kegelfläche selbst eine Niveaufläche ist, daß die Niveauflächen für diejenigen Theile der Flüssigkeit, welche von der Kegelfläche begrenzt sind und von der Achse geschnitten werden, Hyperboloide mit zwei Mänteln sind, während sie für den übrigen Theil der Flüssigkeit Hyperboloide mit einem Mantel darstellen, wie es in der Figur angedeutet ist. Die Flüssigkeit könnte demnach auch dann in diesem Gleichgewichtszustande verharren, wenn dieselbe, wie in Fig. 12, senkrecht zur Erzeugenden des Asymptotenkegels durch feste Wände begrenzt würde, und wenn auf den die Achse umgebenden Trichter ein kleinerer Druck P_1 ausgeübt würde, als der auf das einmantelige Hyperboloid ausgeübte Druck P_2 ist.

Ist endlich noch P_0 negativ, so kann man

$$P = -P_0 + \frac{q}{2}(\varphi^2 - k)r^2 - \frac{q}{2}k\zeta^2$$

schreiben; es wird dann P negativ für alle Punkte, welche zwischen dem einmanteligen Hyperboloid:

$$q(\varphi^2 - k)r^2 - qk\zeta^2 = 2P_0$$

und der Achse liegen; die Flüssigkeit ist folglich in diesem Falle um die Umdrehungsachse ganz hohl und kann nur wieder mit Hülfe fester Wände im Gleichgewichtszustand erhalten werden, sei es, daß ein äußerer Druck auf sie ausgeübt wird oder nicht. Es darf übrigens kaum darauf hingedeutet werden, daß in den beiden letzten Fällen, wenn nämlich $\varphi^2 > k$ ist, die ganze Form der Flüssigkeitsmasse mit unserer Voraussetzung, daß die auf ein Flüssigkeitstheilchen wirkende Kraft von der ganzen Masse der Flüssigkeit ausgehen und der Entfernung desselben von dem Mittelpunkt proportional sein soll, nicht wohl zu vereinbaren ist.

§. 27.

Die vorhergehende Annahme einer der Entfernung von dem Mittelpunkte proportionalen Anziehung kann strenggenommen, wie im sechsten Kapitel des zweiten Buches gezeigt wurde, nur für eine homogene Kugel zugelassen werden, weßhalb denn auch die aus dieser Annahme gezogenen Folgerungen mit den auf der Erde stattfindenden Verhältnissen nur wenig übereinstimmen. Der richtige Weg zur Ermittelung der Gestalt der Meeresfläche oder allgemeiner irgend einer Niveaufläche des Meeres besteht darin, die aus dem allgemeinen Attractions-Gesetze sich ergeben-

den Componenten in die Gleichungen (51) und (52ª) einzuführen und diese dann nach s oder nach ξ, η und ζ zu integriren. Allein es ist leicht zu sehen, daß diese Aufgabe nicht wohl direct lösbar ist und daß sehr viele Körperformen denkbar sind, welche den genannten Gleichungen entsprechen. Denn ist $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ die Gleichung einer Niveaufläche, also ξ, η, ζ die Coordinaten eines Flüssigkeitstheilchens derselben, so muß die Gleichung (51) für eine constante Winkelgeschwindigkeit und einen dauernden Gleichgewichtszustand die Form haben:

$$a.) \qquad \frac{dF}{d\xi}\frac{d\xi}{ds} + \frac{dF}{d\eta}\frac{d\eta}{ds} + \frac{dF}{d\zeta}\frac{d\zeta}{ds} = 0 \ .$$

Sind dann ferner x, y, z die Coordinaten irgend eines andern Punktes der Flüssigkeit oder des festen Kernes der Erde, auf dieselben Achsen bezogen, so haben wir nach dem angeführten Kapitel des zweiten Buches für die Componenten Ξ, H, Z die Ausdrücke:

$$\Xi = G\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{z_0}^{z_1} dz \,.\, q\,\frac{x-\xi}{w^3} \ , \quad H = G\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{z_0}^{z_1} dz \,.\, q\,\frac{y-\eta}{w^3} \ ,$$

$$Z = G\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{z_0}^{z_1} dz \,.\, q\,\frac{z-\zeta}{w^3} \ ,$$

worin zur Abkürzung w für $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ gesetzt ist, und sich die Integrations-Grenzen x_1 und x_0, y_1 und y_0, z_1 und z_0 aus der Gleichung der äußern Umhüllungsfläche der Erde oder der zu bestimmenden Körperform ergeben. Da nun diese Umhüllungsfläche von der Flüssigkeit selbst gebildet wird, also bei der Erde die über die Meeresfläche hervorragenden Theile des festen Kernes vernachlässigt werden, so müssen die genannten Grenzen aus der Gleichung: $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ selbst genommen werden, worin dann aber die Coordinaten ξ, η und ζ nur noch den Punkten dieser äußersten Niveaufläche angehören. Setzen wir also für das Coordinatensystem eine solche Lage voraus, daß die Integrale nicht getheilt zu werden brauchen, daß also für jedes beliebige x die Grenzen von y und z dieselben bleiben, so hätte man für die Grenzen z_0 und z_1 die Werthe von z zu setzen, die sich durch Auflösung der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ ergeben, und welche die Form: $z_0 = f_0(x, y)$, $z_1 = f_1(x, y)$ annehmen; es kann also schon die Integration in Bezug auf y nicht mehr ausgeführt

werden, da die Functionen f_1 und f_0 unbekannt sind. Eine directe Auflösung unserer Aufgabe ist daher unmöglich, und es bleibt nur der Weg des Probirens übrig, d. h. man kann nur eine beliebige Körperform: $F(x, y, z) = 0$ wählen, die Componenten Ξ, H, Z darnach berechnen, deren Werthe in die Gleichung (51) unter Voraussetzung einer constanten Winkelgeschwindigkeit einführen und diese mit der aus $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ folgenden Gleichung (a) zusammenhalten; dadurch ergeben sich die allgemeinen Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
k\frac{dF}{d\xi} &= \Xi + \varphi^2\xi = G\int_{x_0}^{x_1}dx\int_{y_0}^{y_1}dy\int_{z_0}^{z_1}dz\,.\,q\,\frac{x-\xi}{w^3} + \varphi^2\xi\,, \\
k\frac{dF}{d\eta} &= H + \varphi^2\eta = G\int_{x_0}^{x_1}dx\int_{y_0}^{y_1}dy\int_{z_0}^{z_1}dz\,.\,q\,\frac{y-\eta}{w^3} + \varphi^2\eta\,, \\
k\frac{dF}{d\zeta} &= Z \qquad\qquad\;\; = G\int_{x_0}^{x_1}dx\int_{y_0}^{y_1}dy\int_{z_0}^{z_1}dz\,.\,q\,\frac{z-\zeta}{w^3}\,,
\end{aligned}\right\} \quad (53.$$

in denen k eine zu bestimmende Constante bezeichnet, und welche der allgemeinen Form nach befriedigt werden müssen, wenn ein Gleichgewichtszustand in der gewählten Form überhaupt möglich sein soll, und wenn dieses der Fall ist, werden sie dazu dienen, die der gewählten Form zukommenden Constanten oder vielmehr deren Verhältnisse zu bestimmen; denn eine dieser Constanten muß willkürlich bleiben und kann nur durch die Menge der Flüssigkeit bedingt sein.

Wollte man z. B. annehmen, daß die Niveauflächen Kugelflächen sein sollen, so hätte man nach §. 107 des zweiten Buches für die resultirende Beschleunigung eines Punktes der Umhüllungsfläche vom Halbmesser r den Ausdruck: $\frac{GM}{r^2}$ und daher für die Componenten Ξ, H, Z die Werthe:

$$\Xi = -\frac{GM}{r^2}\cdot\frac{\xi}{r}\,,\quad H = -\frac{GM}{r^2}\cdot\frac{\eta}{r}\,,\quad Z = -\frac{GM}{r^2}\cdot\frac{\zeta}{r}\,,$$

und aus der Gleichung:

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - r^2$$

ergibt sich

$$\frac{dF}{d\xi} = 2\xi \quad , \quad \frac{dF}{d\eta} = 2\eta \quad , \quad \frac{dF}{d\zeta} = 2\zeta \ .$$

Dadurch nehmen die Gleichungen (53) die Form an:

$$2k\xi = -\left(\frac{GM}{r^3} - \varphi^2\right)\xi \quad , \quad 2k\eta = -\left(\frac{GM}{r^3} - \varphi^2\right)\eta \ ,$$

$$2k\zeta = -\frac{GM}{r^3}\zeta$$

und können so offenbar nicht mit einander bestehen, weil die dritte durch die erste dividirt das Verhältniß:

$$\frac{\zeta}{\xi} = \frac{GM}{GM - \varphi^2 r^3} \cdot \frac{\zeta}{\xi}$$

gibt, welches unmöglich bleibt, so lange φ^2 nicht Null ist; es ist also auch unmöglich, daß unter den zu Grunde gelegten Voraussetzungen des allgemeinen Gesetzes für die gegenseitige Anziehung der Massetheilchen und einer gleichförmig rotirenden Bewegung die Niveauflächen Kugelflächen sind.

Eine größere Wahrscheinlichkeit besteht für das abgeplattete Umdrehungsellipsoid. Die Gleichung desselben hat die Form:

$$F(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\zeta^2}{C^2} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{A^2} - 1 = 0 \ ,$$

und man zieht daraus

$$\frac{dF}{d\xi} = \frac{2\xi}{A^2} \ , \quad \frac{dF}{d\eta} = \frac{2\eta}{A^2} \ , \quad \frac{dF}{d\zeta} = \frac{2\zeta}{C^2} \ .$$

Wir haben für ein solches Ellipsoid in §. 114 des zweiten Buches unter der Voraussetzung, daß die Masse desselben eine constante Dichte besitzt, als Componenten der auf einen Punkt seiner Oberfläche oder seiner Masse überhaupt ausgeübten Anziehung die Werthe gefunden:

$$\left\{\begin{aligned} Z &= G\mu M \frac{3c}{C^3\lambda^3}(\lambda - arc\ tang\ \lambda) \ , \\ H &= G\mu M \frac{3b}{2C^3\lambda^3}\left(arc\ tang\ \lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) \ , \\ \Xi &= G\mu M \frac{3a}{2C^3\lambda^3}\left(arc\ tang\ \lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) \ ; \end{aligned}\right.$$

ersetzt man darin die Coordinaten a, b, c des angegriffenen Punktes durch ξ, η, ζ, nimmt Rücksicht auf die Zeichen dieser Componenten und dividirt durch μ, welches in unserm jetzigen Falle durch die geometrische Dichte q der Flüssigkeit zu ersetzen wäre, so werden die Gleichungen (53) folgende:

$$\left.\begin{aligned}\frac{2k\xi}{A^2} &= -\left[\frac{3GM}{2C^3\lambda^3}\left(arc\ tang\ \lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) - \varphi^2\right]\xi \ ,\\ \frac{2k\eta}{A^2} &= -\left[\frac{3GM}{2C^3\lambda^3}\left(arc\ tang\ \lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) - \varphi^2\right]\eta \ ,\\ \frac{2k\zeta}{C^2} &= -\frac{3GM}{C^3\lambda^3}(\lambda - arc\ tang\ \lambda)\,\zeta \ ,\end{aligned}\right\}$$

und man wird leicht sehen, daß deren Befriedigung von der einzigen Bedingung abhängt:

$$\frac{C^2}{A^2} = \frac{\frac{3GM}{\lambda^3}\left(arc\ tang\ \lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) - 2C^3\varphi^2}{\frac{6GM}{\lambda^3}(\lambda - arc\ tang\ \lambda)} \ , \quad \text{(b.}$$

welche im Allgemeinen bedingt, daß der Zähler der rechten Seite positiv, daß also

$$\varphi^2 < \frac{3GM}{2C^3\lambda^3}\left(arc\ tang\ \lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) \quad \text{(c.}$$

sein muß, wenn die Niveauflächen Umdrehungsellipsoide werden sollen. Wir haben dann weiter (II. Buch, §. 113)

$$A^2 - C^2 = \lambda^2 C^2 \ , \quad \frac{C^2}{A^2} = \frac{1}{1+\lambda^2} \ ,$$

und für die Masse M des Ellipsoids

$$M = \frac{4}{3}\pi q A^2 C = \frac{4}{3}\pi q C^3 (1+\lambda^2) \ .$$

Führt man diese Werthe in die Bedingung (b) ein, so wird dieselbe nach einigen einfachen Reductionen, und wenn man den constanten Quotienten $\frac{\varphi^2}{2\pi Gq}$ durch ω^2 ersetzt,

$$\text{d.)} \qquad \frac{(3+\lambda^2)\ \mathit{arc\ tang}\ \lambda - 3\lambda}{\lambda^3} - \omega^2 = 0$$

und dient in dieser Form *) dazu, die einzige für die besondere Gestalt unserer Niveauflächen maßgebende Größe λ zu berechnen. Ersetzt man dazu das Null der rechten Seite dieser Gleichung durch y und beachtet, daß λ für unsere Betrachtung nur positive Werthe erhalten kann, also zwischen 0 und ∞ liegen muß, so findet man folgende Reihe zusammengehöriger Werthe von λ und y:

$\lambda = 0$,	$\mathit{arc\ tang}\ \lambda = 0$,	$y = -\omega^2$,
$= 1$,	$= \frac{1}{4}\pi$,	$= \pi - 3 - \omega^2 = 0{,}1416 - \omega^2$,
$= \sqrt{3}$,	$= \frac{1}{3}\pi$,	$= \frac{2}{9}\pi\sqrt{3} - 1 - \omega^2 = 0{,}2092 - \omega^2$,
$= 3$,	$= 1{,}249$,	$= 0{,}2218 - \omega^2$,
$= 5$,	$= 1{,}373$,	$= 0{,}1602 - \omega^2$,
$= \infty$,	$= \frac{1}{2}\pi$,	$= -\omega^2$,

und diese zeigt, daß die Function:

$$u = \frac{(3+\lambda^2)\ \mathit{arc\ tang}\ \lambda - 3\lambda}{\lambda^3}$$

zwischen $\lambda = \sqrt{3}$ und $\lambda = 5$ einen größten Werth erhält, daß ω^2 diesen größten Werth von u nicht übersteigen darf, wenn die Gleichung (d) möglich werden soll, und daß dieselbe in diesem Falle immer zwei Werthe für λ gibt, welche zu beiden Seiten des dem Maximum von u entsprechenden λ liegen, daß also für ein sehr kleines ω^2 der Werth von λ ebensowohl sehr nahe an 0 als an ∞ liegen kann, daß daher die entsprechende Niveaufläche ebensowohl ein sehr wenig abgeplattetes

---

*) Mit Berücksichtigung der Form der Werthe von Ξ; H, Z wird man leicht einsehen, daß man die Bedingungsgleichung (d) nicht unter die Form: $(3+\lambda^2)\ \mathit{arc\ tang}\ \lambda - 3\lambda - \lambda^3\omega^2 = 0$ bringen darf, da sie alsdann 3 gleiche Wurzeln: $\lambda = 0$ erhält, welche keine Bedeutung haben können, da sie nur von dem Factor λ^3 herrühren, mit welchem in der letzten Form die ganze Gleichung multiplizirt ist.

Sphäroid, als ein sehr stark abgeplattetes, einer flachen Scheibe sich näherndes Umdrehungs=Ellipsoid sein kann. Jener größte Werth von u und ω entspricht einem von 0 verschiedenen Werthe von λ, welcher die Gleichung:

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{(9+7\lambda^2)\,\lambda - (1+\lambda^2)(9+\lambda^2)\,arc\ tang\,\lambda}{\lambda^4(1+\lambda^2)} = 0$$

oder die einfachere Gleichung:

$$arc\ tang\,\lambda - \lambda\,\frac{9+7\lambda^2}{(1+\lambda^2)(9+\lambda^2)} = 0$$

befriedigt, und man wird auf dem gewöhnlichen Wege der Annäherung für dieses λ_m und das entsprechende u_m oder ω^2_m

$$\lambda_m = 2{,}5293\ldots\ , \qquad u_m = 0{,}2247\ldots = \omega^2_m$$

finden. Dieser größte Werth von ω^2, welcher noch für die Möglichkeit der Gleichung (d) zulässig ist, muß aber auch der Bedingung (c) genügen, welche mit den obigen Werthen von M und ω^2 die Form annimmt:

$$\omega^2 < \frac{(1+\lambda^2)\,arc\ tang\,\lambda - \lambda}{\lambda^3}\ ,$$

und man findet in der That mit den berechneten Werthen von λ_m und $\omega_m{}^2$ die geforderte Ungleichheit:

$$0{,}2247 < 0{,}3900\ .$$

Nach dem obigen allgemeinen Werth von ω^2 haben wir ferner

$$\varphi^2 = 2\pi\,G\,q\,.\,\omega^2\ ;$$

und wenn wir in diese Gleichung den in §. 55 des dritten Buches berechneten, auf die Einheiten: Meter, Kilogramm und Sekunde bezogenen Werth von G einführen, so erhalten wir für die dem größten Werthe von ω^2 entsprechende Winkelgeschwindigkeit φ_m

$$\varphi_m = \sqrt{2\pi\,q\,.\,0{,}0000000006564\,.\,0{,}2247}\ .$$

In diesem Ausdruck ist die Einheit der Dichte die eines Stoffes, welcher in einem Kubik=Meter die metrische Masseneinheit enthält, von welchem also ein Kubik=Meter an der Oberfläche der Erde unter 45° Breite

9,809 Kilogramm wiegt. Will man also die Dichte q durch das gewöhnliche specifische Gewicht s ersetzen, so hat man für q den Werth:

$$q = \frac{1000}{9,809}\, s$$

einzuführen und findet damit

$$\varphi_m = \sqrt{\frac{2\pi \,.\, 0,0000006564 \,.\, 0,2247}{9,809}\, s} = 0,0003074 \sqrt{s}$$

als größte Winkelgeschwindigkeit, mit welcher eine nur durch die gegenseitige Massen-Anziehung zusammengehaltene Flüssigkeitsmasse vom specifischen Gewichte s in der Gestalt eines Umdrehungs-Ellipsoides um dessen geometrische Achse rotiren kann.

Die größte Winkelgeschwindigkeit in unserem Planetensystem ist die des Jupiter und dessen mittlere specifische Dichte s ist etwas größer als 1; derselbe dreht sich in nahe 9,9 Stunden oder 35640 Sekunden um seine Achse, seine Winkelgeschwindigkeit ist daher nahe $= \frac{2\pi}{35640}$ $= 0,000178$ und bleibt daher noch weit unter dem obigen Maximalwerthe.

Für die Erde haben wir $\varphi = \frac{2\pi}{86164}$, und wenn wir sie als eine Flüssigkeitsmasse von der mittleren specifischen Dichte $s = 5,5$ betrachten, so finden wir zunächst

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{(86164)^2} \cdot \frac{9,809}{2\pi \,.\, 0,0000006564 \,.\, 5,5} = 0,002299\ldots ,$$

und da dieser Werth sehr klein ist, so wird auch der entsprechende Werth von λ so klein sein, daß man in der Gleichung (d) *arc tang* λ durch die Reihe $\lambda - \frac{1}{3}\lambda^3 + \frac{1}{5}\lambda^5$ ersetzen und die höhern Potenzen von λ vernachlässigen kann, wodurch dieselbe auf

$$\frac{4}{15}\lambda^2 - \omega^2 = 0 \quad , \quad \lambda^2 = \frac{15}{4}\omega^2$$

zurückkommt und mit dem vorstehenden Werthe von ω^2

$$\lambda^2 = 0,008623$$

gibt. Das Verhältniß der beiden Achsen des Erdsphäroids müßte darnach sein

$$\frac{A}{C} = \sqrt{1+\lambda^2} = 1 + \frac{1}{2}\lambda^2 = 1{,}00431 \quad ,$$

die Abplattung also $= \dfrac{0{,}00431}{1{,}00431} = 0{,}00429$, d. i. 1,284 oder nahe $1\frac{2}{7}$ mal größer, als sie wirklich ist. Es ist daraus ferner leicht zu schließen, daß die mittlere specifische Dichte der Erde $\frac{9}{7} \times 5{,}5 = 7{,}07$ sein müßte, wenn die unter unserer Voraussetzung einer constanten Dichte sich ergebende Abplattung der wirklich stattfindenden gleich werden soll, und es geht daraus abermals (wie in §. 115 des zweiten Buches) hervor, daß die Verhältnisse an der Oberfläche der Erde durch die veränderliche Dichte derselben sich doch wesentlich anders gestaltet haben, als sie bei constanter Dichte sein würden, und daß die wirklich stattfindenden Verhältnisse nur dann aus der Theorie abgeleitet werden können, wenn auf die Veränderung der Dichte Rücksicht genommen, und die Erde zunächst als aus ellipsoidischen Schichten von zunehmender Dichte gebildet angenommen wird, worauf indessen hier nicht eingegangen werden kann.

Es soll indessen noch bemerkt werden, daß man sich auf dem für das abgeplattete Ellipsoid befolgten Wege leicht überzeugen kann, daß ein Gleichgewichtszustand in der Form eines spindelförmigen Ellipsoids nicht möglich ist. Denn für diesen Fall kommt man mit den in §. 114 des zweiten Buches gefundenen Werthen (83) für Ξ, H und Z auf die Bedingung:

$$\frac{3\lambda(1+\lambda^2)-(3+2\lambda^2)\sqrt{1+\lambda^2}\,logn\left(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}\right)}{\lambda^3} - \omega^2 = 0$$

oder in einfacherer Form, wenn man $\lambda = tang\, u$ setzt,

$$\frac{3\,sin\,u - (3 - sin^2 u)\; logn\; tang\,(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}u)}{sin^3 u} - \omega^2 = 0 \quad ,$$

und diese Bedingung kann durch keinen Werth von λ befriedigt werden, da das erste Glied der linken Seite mit 0 anfängt, mit wachsendem λ oder u negativ wächst und für $\lambda = \infty$, $u = \frac{1}{2}\pi$ mit $-\infty$ endigt.

§. 28.

Eine weitere Anwendung für die Gleichungen (49) bis (52^b) erhalten wir in der Untersuchung des Gleichgewichtszustandes unserer

Atmosphäre, wenn wir davon ausgehen, daß die auf ein Lufttheilchen wirkende Kraft die von dem ellipsoidischen Erdkörper nach dem allgemeinen Attractionsgesetz ausgeübte Wirkung ist, und daß die Lufttheilchen alle an der Umdrehung der Erde Theil nehmen.

Unter dieser Voraussetzung haben wir in die genannten Gleichungen für die Componenten Ξ, H, Z die in §. 119 des zweiten Buches abgeleiteten Werthe (86), aber mit negativen Zeichen einzuführen, darin a, b, c durch ξ, η, ζ zu ersetzen und μ zu streichen, so daß man hat

$$\text{f.)} \quad \left\{ \begin{aligned} \Xi &= -\,\mathrm{G\,M}\,\frac{3\,\xi}{2\,\mathrm{C}^3\,\lambda^3}\left(arc\ tang\ \lambda' - \frac{\lambda'}{1+\lambda'^2}\right) \quad , \\ H &= -\,\mathrm{G\,M}\,\frac{3\,\eta}{2\,\mathrm{C}^3\,\lambda^3}\left(arc\ tang\ \lambda' - \frac{\lambda'}{1+\lambda'^2}\right) \quad , \\ Z &= -\,\mathrm{G\,M}\,\frac{3\,\zeta}{\mathrm{C}^3\,\lambda^3}\,(\lambda' - arc\ tang\ \lambda') \quad . \end{aligned} \right.$$

In diesen Werthen bedeutet M die Masse der Erde, C die halbe Achse derselben und $\sqrt{1+\lambda^2}$ das Verhältniß des Aequatorhalbmessers zu dieser letztern, und λ' steht für $\lambda\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}'}$, wenn C′ die halbe kleine Achse eines durch den Punkt $\xi\,\eta\,\zeta$ gelegten Ellipsoides bezeichnet, dessen erzeugende Ellipse dieselben Brennpunkte hat, wie die die Erdoberfläche erzeugende, so daß die Gleichung besteht:

$$\mathrm{A}'^2 - \mathrm{C}'^2 = \mathrm{A}^2 - \mathrm{C}^2 = \mathrm{C}^2\,\lambda^2 \quad .$$

Es sind demnach C′ und λ' selbst Functionen von ξ, η, ζ; denn man hat, um C′ zu bestimmen, die Gleichung:

$$\frac{\xi^2+\eta^2}{\mathrm{A}'^2} + \frac{\zeta^2}{\mathrm{C}'^2} = \frac{\xi^2+\eta^2}{\mathrm{C}'^2+\mathrm{C}^2\lambda^2} + \frac{\zeta^2}{\mathrm{C}'^2} = 1 \quad ,$$

oder wenn $\xi^2+\eta^2$ durch r^2 ersetzt wird,

$$\text{g.)} \quad \mathrm{C}'^4 - \mathrm{C}'^2\,(\mathrm{r}^2+\zeta^2-\lambda^2\,\mathrm{C}^2) - \lambda^2\,\mathrm{C}^2\,\zeta^2 = 0 \quad ,$$

und man zieht daraus

$$\text{h.)} \quad \mathrm{C}'^2 = \frac{\mathrm{r}^2+\zeta^2-\lambda^2\mathrm{C}^2}{2} + \frac{\sqrt{\mathrm{r}^4+(\zeta^2+\lambda^2\,\mathrm{C}^2)^2+2\mathrm{r}^2(\zeta^2-\lambda^2\mathrm{C}^2)}}{2} \quad ,$$

da der Werth von C' offenbar nur reell werden kann, wenn die Wurzelgröße mit dem Zeichen + genommen wird.

Die Bedingung (50) für einen dauernden Gleichgewichtszustand nimmt mit den Werthen (f), und wenn man noch $\frac{\lambda^3 C^3}{3GM}\varphi^2$ durch $\varphi_,^2$ ersetzt, die Form an:

$$\frac{\lambda^3 C^3}{3GM}\frac{dY}{ds} = -\frac{1}{2}\left(arctang\,\lambda' - \frac{\lambda'}{1+\lambda'^2} - 2\varphi_,^2\right) r\frac{dr}{ds} - (\lambda' - arctang\,\lambda')\,\zeta\frac{d\zeta}{ds} \qquad \text{(i.}$$

und kommt demnach auf folgende zurück:

$$\frac{1}{2}\,\frac{d.\left(arctang\,\lambda' - \frac{\lambda'}{1+\lambda'^2} - 2\varphi_,^2\right) r}{d\zeta} = \frac{d.(\lambda' - arctang\,\lambda')\,\zeta}{dr} \,. \qquad \text{(k.}$$

Man hat aber

$$\frac{1}{2}\,\frac{d.\left(arctang\,\lambda' - \frac{\lambda'}{1+\lambda'^2} - 2\varphi_,^2\right) r}{d\zeta} = \frac{\lambda'^2}{(1+\lambda'^2)^2}\, r\, \frac{d\lambda'}{d\zeta} \,,$$

$$\frac{d\,.\,(\lambda' - arc\,tang\,\lambda')\,\zeta}{dr} = \frac{\lambda'^2}{1+\lambda'^2}\,\zeta\,\frac{d\lambda'}{dr} \;;$$

ferner folgt aus dem Werthe von λ'

$$\frac{d\lambda'}{dr} = -\frac{\lambda C}{C'^2}\,\frac{dC'}{dr} \,, \qquad \frac{d\lambda'}{d\zeta} = -\frac{\lambda C}{C'^2}\,\frac{dC'}{d\zeta} \,,$$

und aus der Gleichung (g) zieht man, $\lambda C = c$ gesetzt,

$$\frac{dC'}{dr} = \frac{C' r}{2C'^2 - r^2 - \zeta^2 + c^2} \,, \qquad \frac{dC'}{d\zeta} = \frac{(C'^2 + c^2)}{C'(2C'^2 - r^2 - \zeta^2 + c^2)} \,.$$

Wenn dann diese Werthe in die Gleichung (k) eingeführt werden, so kommt dieselbe nach Abwerfung der gemeinschaftlichen Factoren auf

$$\frac{C'^2 + c^2}{C'^2}\,.\,\frac{1}{1+\lambda'^2} = 1$$

zurück und zeigt mit der Beachtung, daß $c^2 = \lambda'^2 C'^2$ ist, daß sie in

der That befriedigt wird, daß also ein dauernder Gleichgewichtszustand möglich ist. Das Integral der Gleichung (i) gibt uns also die Gestalt der Niveaufläche und den geometrischen Druck.

Dazu haben wir zunächst

$$-\frac{dY}{dr} = \frac{1}{2} r \left(arc \, tang \, \lambda' - \frac{\lambda'}{1+\lambda'^2} - 2\varphi_{,}^{2} \right)$$

und ziehen daraus

$$-\Delta Y = \Delta . \frac{1}{4} r^2 \left(arc tang \lambda' - \frac{\lambda'}{1+\lambda'^2} - 2\varphi_{,}^{2} \right) - \frac{1}{2} \int dr . \frac{\lambda'^2 r^2}{(1+\lambda'^2)^2} \frac{d\lambda'}{dr}$$
$$+ \Delta f(\zeta) \; .$$

Ersetzen wir sodann in der Gleichung (g) wie oben $\lambda^2 C^2$ durch c^2 C'^2 durch $\frac{c^2}{\lambda'^2}$, so nimmt dieselbe die Form:

l.) $$(c^2 - \zeta^2 \lambda'^2)(1+\lambda'^2) - \lambda'^2 r^2 = 0$$

an, und mit dem daraus folgenden Werthe von $\lambda'^2 r^2$ wird

$$\int dr . \frac{\lambda'^2 r^2}{(1+\lambda'^2)^2} \frac{d\lambda'}{dr} = \int d\lambda' . \frac{c^2 - \zeta^2 \lambda'^2}{1+\lambda'^2} \quad ;$$

also hat man mit der Beachtung, daß für dieses Integral ζ als constant zu betrachten ist,

$$\int dr . \frac{\lambda'^2 r^2}{(1+\lambda'^2)^2} \frac{d\lambda'}{dr} = \Delta \left[c^2 arc tang \lambda' - \zeta^2 (\lambda' - arc tang \lambda') \right] ,$$

und

$$-\Delta Y = \Delta \left[\frac{1}{4} r^2 \left(arc tang \lambda' - \frac{\lambda'}{1+\lambda'^2} - 2\varphi_{,}^{2} \right) - \frac{1}{2} c^2 arc tang \lambda' \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \zeta^2 (\lambda' - arc tang \lambda') \right] + \Delta f(\zeta) \; .$$

Daraus zieht man dann ferner

$$-\frac{dY}{d\zeta} = \frac{1}{2} \left(r^2 \frac{\lambda'^2}{(1+\lambda'^2)^2} - c^2 \frac{1}{1+\lambda'^2} + \zeta^2 \frac{\lambda'^2}{1+\lambda'^2} \right) \frac{d\lambda'}{d\zeta}$$
$$+ \zeta (\lambda' - arc tang \lambda') + f'(\zeta)$$

und erhält durch Vergleichung mit der Gleichung (i) und mit der Beachtung der Gleichung (l), welche zeigt, daß der Factor von $\frac{d\lambda'}{d\zeta}$ Null wird, die Bedingung:

$$f'(\zeta) = 0 \quad , \qquad \Delta f(\zeta) = 0 \ .$$

Die Gleichung der Niveauflächen wird demnach

$$\left.\begin{aligned} \Delta \ . \ \Big[r^2 \Big(arc\,tang\,\lambda' - \frac{\lambda'}{1+\lambda'^2} - 2\varphi_{,}^2 \Big) \\ + 2\zeta^2 (\lambda' - arc\,tang\,\lambda') - 2c^2\, arc\,tang\,\lambda' \Big] = 0 \ , \end{aligned}\right\} \text{(m.}$$

und als Beziehung zwischen dem geometrischen Druck und den Coordinaten findet man nach Gleichung (52^b), die sich hier unter der Form:

$$\frac{dP}{ds} = q\,\frac{3GM}{\lambda^3 C^3}\,\frac{dY}{ds}$$

darstellt, und unter Zugrundlegung des Mariotte'schen Gesetzes in der Form:

$$g\,q = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{P}}\,P$$

die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{4\mathbf{P}g}{\mathbf{p}}\,\Delta\,.\,log\,n\,P = -\frac{3GM}{C^3\lambda^3}\,\Delta\,.\,\Big[r^2 \Big(arc\,tang\,\lambda' - \frac{\lambda'}{1+\lambda'^2} - 2\varphi_{,}^2 \Big) \\ + 2\zeta^2 (\lambda' - arc\,tang\,\lambda') - 2c^2\, arc\,tang\,\lambda' \Big] \ . \end{aligned}\right\} \text{(n.}$$

Es würde hier zuweit führen, wenn wir die Gleichungen (m) und (n) in ihrer allgemeinen genauen Form weiter untersuchen wollten; auch machen dieß die bei der Erde obwaltenden Verhältnisse überflüssig; denn da hier λ ein ziemlich kleiner Bruch, und λ' noch kleiner ist als λ, weil C' immer größer als C sein muß, so kann man die Function: *arc tang* λ' in eine Reihe entwickeln wie in §. 115 des zweiten Buches und die für die gewünschte Genauigkeit überflüssigen höhern Potenzen von λ' vernachlässigen. Dazu muß man aber den in $\varphi_{,}^2$ enthaltenen Factor: $\lambda^3 C^3 = c^3 = \lambda'^3 C'^3$ herbei ziehen, und man findet damit wie in dem eben erwähnten §.

$$\frac{arc\,tang\,\lambda' - \dfrac{\lambda'}{1+\lambda'^2}}{\lambda'^3} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{6}{5}\lambda'^2\right) \quad ,$$

$$\frac{\lambda' - arc\,tang\,\lambda'}{\lambda'^3} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{5}\lambda'^2\right) \quad .$$

Bei gleicher Annäherung wird

$$\frac{2c^2\,arc\,tang\,\lambda'}{C^3\,\lambda^3} = \frac{2\,arc\,tang\,\lambda'}{C'\,\lambda'} = 2\,\frac{1-\frac{1}{3}\lambda'^2}{C'} \quad ,$$

und mit der Beachtung, daß $C'\lambda' = C\lambda = C'_0\lambda'_0$, daß man also den veränderlichen Theil der Gleichung (m) mit $C'\lambda'$, den constanten Theil, welcher die Form hat:

$$r_0{}^2\left(arctang\lambda'_0 - \frac{\lambda'_0}{1+\lambda'_0{}^2}\right) + 2\zeta^2(\lambda'_0 - arctang\lambda'_0) - 2c^2 arctang\lambda'_0$$

mit $C'_0\lambda'_0$ dividiren kann, geht diese Gleichung in folgende über:

$$\text{o.)}\quad 0 = \varDelta.\left[\frac{r^2}{C'^3}\left(1-\frac{6}{5}\lambda'^2\right) + \frac{\zeta^2}{C'^3}\left(1-\frac{3}{5}\lambda'^2\right) - \frac{3}{C'}\left(1-\frac{1}{3}\lambda'^2\right) - \frac{\varphi^2 r^2}{GM}\right],$$

und die Gleichung (n) wird in gleicher Weise

$$\text{p.)}\quad \begin{cases} \dfrac{2\,\mathbf{P}g}{\mathbf{P}}\,\varDelta\,.\,logn\,P = \varDelta\,.\,\varphi^2 r^2 \\ \quad -\varDelta.\dfrac{GM}{C'^3}\left[r^2\left(1-\dfrac{6}{5}\lambda'^2\right) + \zeta^2\left(1-\dfrac{3}{5}\lambda'^2\right) - 3C'^2\left(1-\dfrac{1}{3}\lambda'^2\right)\right]; \end{cases}$$

es sind also noch die Werthe von C' und λ' für die entsprechende Annäherung zu bestimmen.

Bringt man dazu die Größe unter dem Wurzelzeichen des Werthes (h) unter die Form:

$$(r^2 + \zeta^2)^2 - 2\,(r^2 - \zeta^2)\,c^2 + c^4 \quad ,$$

so wird man erkennen, daß das letzte Glied $c^4 = \lambda^4 C^4$ für unsere Annäherung vernachlässigt werden darf, da $r^2 + \zeta^2$ immer größer ist, als C^2, und daß man demnach den Werth (h) auf

$$C'^2 = \frac{r^2+\zeta^2-c^2}{2} + \frac{r^2+\zeta^2}{2}\left(1-\frac{(r^2-\zeta^2)c^2}{(r^2+\zeta^2)^2}\right)$$

$$= (r^2+\zeta^2)\left(1 - \lambda^2\,\frac{C^2\,r^2}{(r^2+\zeta^2)^2}\right)$$

zurückführen kann. Damit wird aber bei gleicher Annäherung

$$C'^3 = (r^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{3}{2}\lambda^2\,\frac{C^2\,r^2}{(r^2+\zeta^2)^2}\right) ,$$

und für λ'^2 genügt der Werth:

$$\lambda'^2 = \lambda^2\,\frac{C^2}{r^2+\zeta^2} .$$

Um diese Werthe in die Gleichungen (o) und (p) einzuführen, bringe ich die rechte derselben unter die Form:

$$\frac{1}{C'^3}\left[(r^2+\zeta^2)\left(1-\frac{3}{5}\lambda'^2\right) - \frac{3}{5}\lambda'^2 r^2 - 3C'^2\left(1-\frac{1}{3}\lambda'^2\right)\right] ,$$

ersetze überall $r^2+\zeta^2$ durch $\mathfrak{r}^2$, C'^2 durch den obigen Werth,

$$\frac{1}{C'^3} = \frac{1}{\mathfrak{r}^3\left(1-\frac{3}{2}\lambda^2\,\frac{C^2 r^2}{\mathfrak{r}^4}\right)} \quad \text{durch} \quad \frac{1}{\mathfrak{r}^3}\left(1+\frac{3}{2}\lambda^2\,\frac{C^2 r^2}{\mathfrak{r}^4}\right)$$

und vernachlässige wie bisher die vierte Potenz von λ; auf diese Weise ergibt sich für die Niveauflächen die Gleichung:

$$\Delta\,.\left(\frac{2}{\mathfrak{r}} - \lambda^2 C^2\,\frac{2\mathfrak{r}^2-3r^2}{5\mathfrak{r}^5} + \frac{\varphi^2 r^2}{GM}\right) = 0 \ , \qquad (54.$$

und für den geometrischen Druck die noch ziemlich einfache Beziehung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{P}g}{\mathfrak{P}}\,\Delta\,.\,logn\,P &= GM\,\Delta\,.\left(\frac{1}{\mathfrak{r}} - \lambda^2 C^2\,\frac{2\mathfrak{r}^2-3r^2}{10\mathfrak{r}^5}\right) \\ &+ \Delta\,.\,\frac{1}{2}\varphi^2 r^2 \ , \end{aligned}\right\} \qquad (55.$$

und diese Gleichungen*) sind es, durch welche die in unserer atmosphärischen Luft obwaltenden Gleichgewichtsverhältnisse mit der nothwendigen Rücksichtsnahme auf die aus der Abplattung der Erde entspringende Aenderung ihrer Anziehung dargestellt würden, wenn die Temperatur derselben durchaus constant und ihre Zusammensetzung durchaus dieselbe wäre.

Die erste dieser Gleichungen zeigt, daß wenn selbst $\lambda = 0$ gesetzt, die Erde also als kugelförmig angenommen wird, die Niveauflächen der Atmosphäre weder Kugelflächen noch Ellipsoide sind; man wird sich aber leicht überzeugen, daß die Gestalt derselben in diesem Fall von einem Ellipsoid nur sehr wenig abweichen würde. Denn jene Gleichung nimmt für $\lambda = 0$ die Form an:

$$\text{q.)} \qquad \frac{1}{\mathfrak{r}} - \frac{1}{\mathfrak{r}_0} + \frac{\varphi^2}{2GM}(r^2 - r_0^2) = 0$$

und gibt nach $\mathfrak{r}$ aufgelöset

$$\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{r}_0}{1 - \frac{\varphi^2 \mathfrak{r}_0 (r^2 - r_0^2)}{2GM}} .$$

Setzt man dann $r_0 = 0$, $GM = g_{,}R^2$, $\mathfrak{r}^2 = r^2 + z^2$ und vernachlässigt die Glieder mit der zweiten und den höhern Potenzen der kleinen Größe $\frac{\varphi^2 \mathfrak{r}_0}{2g_{,}}$ neben der Einheit, so kann man zuerst schreiben

$$r^2 + z^2 = \mathfrak{r}_0^2 \left(1 + \frac{\varphi^2 \mathfrak{r}_0 r^2}{2g_{,}R^2}\right)^2 = \mathfrak{r}_0^2 \left(1 + \frac{\varphi^2 \mathfrak{r}_0 r^2}{g_{,}R^2}\right)$$

und zieht dann daraus

$$r^2 \left(1 - \frac{\varphi^2 \mathfrak{r}_0^3}{g_{,}R^2}\right) + z^2 = \mathfrak{r}_0^2 \quad ;$$

die Gleichung (q) geht demnach unter Vernachlässigung der höhern

*) Man gelangt zu diesen Gleichungen auch unmittelbar dadurch, daß man in die allgemeinen Beziehungen (51) und (52) für Ξ, H und Z die angenäherten Werthe:

$$\Xi = \frac{GM\xi}{C'^3}\left(1 - \frac{6}{5}\lambda'^2\right), \quad H = \frac{GM\eta}{C'^3}\left(1 - \frac{3}{5}\lambda'^2\right), \quad Z = \frac{GM\zeta}{C'^3}\left(1 - \frac{3}{5}\lambda'^2\right)$$

und dann für C' und λ' die obigen Werthe einsetzt.

Potenzen des Gliedes: $\frac{\varphi^2 \mathfrak{r}_0 r^2}{2 g, R^2}$, welches selbst für sehr große Werthe von $\mathfrak{r}_0$ und r, wie sie in der Atmosphäre der Erde nicht mehr vorkommen, z. B. $\mathfrak{r}_0 = r = 1{,}01\,R$, ein 560tel nicht überschreitet, in die Gleichung einer Ellipse oder eines Umdrehungsellipsoides über, dessen Halbachsen

$$\mathfrak{r}_0 \text{ und } \frac{\mathfrak{r}_0}{\sqrt{1 - \frac{\varphi^2 \mathfrak{r}_0^3}{g, R^2}}} = \mathfrak{r}_0 \left(1 + \frac{\varphi^2 \mathfrak{r}_0^3}{2 g, R^2}\right)$$

sind, das also ungefähr nur halb so stark abgeplattet wäre, als es die Meeresfläche der Erde ist.

Die Gleichung (55) kommt unter derselben Voraussetzung: $\lambda = 0$ auf die Form:

$$\frac{\mathbf{P} g}{\mathbf{p}} \, logn \, \frac{P_0}{P} = GM \left(\frac{1}{\mathfrak{r}_0} - \frac{1}{\mathfrak{r}}\right) - \frac{1}{2} \varphi^2 (r^2 - r_0^2)$$

zurück, oder wenn wieder GM durch g, R^2 und noch r^2 durch $\mathfrak{r}^2 \cos^2\beta$, r_0^2 durch $\mathfrak{r}_0^2 \cos^2\beta_0$ ersetzt wird, auf

$$\frac{\mathbf{P} g}{\mathbf{p}} \, logn \, \frac{P_0}{P} = g, R^2 \frac{\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0}{\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}_0} - \frac{1}{2} \varphi^2 (\mathfrak{r}^2 \cos^2\beta - \mathfrak{r}_0^2 \cos^2\beta_0) \,. \quad (\text{r.}$$

Setzt man dann noch $\mathfrak{r} = R + z$, $\mathfrak{r}_0 = R + z_0$ und vernachlässigt die Quadrate und Producte von $\frac{z}{R}$ und $\frac{z_0}{R}$, so wird

$$\frac{\mathbf{P} g}{\mathbf{p}} \, logn \, \frac{P_0}{P} = g, \frac{z - z_0}{1 + \frac{z + z_0}{R}} - \frac{1}{2} \varphi^2 R^2 \left(\cos^2\beta - \cos^2\beta_0 + \frac{2 z \cos^2\beta - 2 z_0 \cos^2\beta_0}{R}\right),$$

und man sieht daraus, wie nothwendig die in §. 20 ausgesprochene Beschränkung ist: daß die beiden Stationen, deren Luftdruck verglichen wird, in derselben Verticalen liegen; denn die vorhergehende Gleichung stimmt nur dann mit hinreichender Annäherung mit der Gleichung (41) in §. 19 überein, wenn $\beta_0 = \beta$ ist, da man sie alsdann mit Berück-

sichtigung der kleinen Werthe von. $\frac{R\varphi^2}{g_\prime} \cos^2\beta$ und $\frac{z+z_0}{R}$ auch in der Form:

$$logn\ \frac{P_0}{P} = \frac{\mathfrak{p}\, g_\prime}{\mathfrak{P}\, g}\left(1 - \frac{R\varphi^2}{g_\prime}\cos^2\beta\right)\frac{z-z_0}{1+\frac{z+z_0}{R}}$$

schreiben kann und $g_\prime\left(1-\frac{R\varphi^2}{g_\prime}\cos^2\beta\right) = g$ hat (Buch I, §. 97).

§. 29.

Die vollständige Gleichung (54) wird, wie leicht zu sehen, viel complicirter; sie nimmt, wenn man

$$r_0 = 0\ ,\quad \frac{2}{\mathfrak{x}_0} - \frac{2\lambda^2 C^2}{5\mathfrak{x}_0^3} = \frac{2}{h}\ \text{ und }\ \frac{\varphi^2 C^3}{GM} = 2\varphi'^2$$

setzt, die Form an:

$$\mathfrak{x}^4 - \frac{\lambda^2 C^2}{10}(2\mathfrak{x}^2 - 3r^2) = \left(\frac{1}{h} - \varphi'^2\frac{r^2}{C^3}\right)\mathfrak{x}^5\ ;$$

sie ist also in Bezug auf $\mathfrak{x}$ vom fünften Grade und erhebt sich in Bezug auf r und ζ zum 14ten und 10ten Grade. Man zieht aus derselben für $r = 0$, $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0$

$$\mathfrak{x}_0 = h\left(1 - \frac{\lambda^2 C^2}{5\mathfrak{x}_0^2}\right)\ ,$$

und für $r = \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1$, und wenn man in den kleinen mit λ^2 und φ'^2 multiplizirten Gliedern $\mathfrak{x}_1$ durch $\mathfrak{x}_0$ ersetzt, das von $\mathfrak{x}_1$ doch nur um ähnliche Glieder verschieden sein kann,

$$\mathfrak{x}_1 = h\,\frac{1+\frac{\lambda^2 C^2}{10\mathfrak{x}_0^2}}{1-\varphi'^2\frac{\mathfrak{x}_0^3 h}{C^3}} = h\left(1+\frac{\lambda^2 C^2}{10\mathfrak{x}_0^2} + \varphi'^2\frac{\mathfrak{x}_0^3 h}{C^3}\right)\ ,$$

und daraus folgt

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{1 + \frac{\lambda^2 C^2}{10\, r_0^2} + \varphi'^2 \frac{r_0^2 h}{C^3}}{1 - \frac{\lambda^2 C^2}{5\, r_0^2}} = 1 + \frac{3}{10} \frac{\lambda^2 C^2}{r_0^2} + \varphi'^2 \frac{r_0^2 h}{C^3} \quad \text{(s.}$$

als Verhältniß der Abstände des Poles und des Aequators einer Niveaufläche vom Mittelpunkt der Erde. Um diese Abstände von der Oberfläche der Erde zu erhalten, wird man

$$r_0 = R_0 + z_0 \ , \quad r_1 = R_1 + z_1 = R_0 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2\right) + z_1 \ , \quad C = R_0$$

setzen und findet damit unter Vernachlässigung der Quadrate und Producte von $\frac{z_1}{R_0}$ und $\frac{z_0}{R_0}$

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{1 + \frac{1}{2} \lambda^2 + \frac{z_1}{R_0}}{1 + \frac{z_0}{R_0}} = 1 + \frac{1}{2} \lambda^2 + \frac{z_1 - z_0}{R_0} \ , \quad \text{(t.}$$

und auf der rechten Seite der Gleichung (s) genügt es wegen der kleinen Factoren λ^2 und φ'^2 für r_0^2 und h die Werthe R_0^2 und R_0 zu setzen; diese Gleichung gibt demnach

$$\frac{z_1 - z_0}{R} = -\frac{1}{5} \lambda^2 + \varphi'^2$$

und zeigt, daß sich die Niveauflächen der Atmosphäre im Aequator mehr von der Meeresfläche entfernen als am Pol, wenn

$$\varphi'^2 > \frac{1}{5} \lambda^2 \ ,$$

wie es bei der Erde wirklich stattfindet, wo $\frac{1}{5} \lambda^2$ nahe $\frac{1}{750}$ und φ'^2 nahe gleich $\frac{\varphi^2 R_0}{2g}$, also nahe $\frac{1}{580}$, so daß man hier ungefähr hat

$$z_1 - z_0 = \frac{1}{2560} R_0 = 2480 \ \text{Meter}$$

oder vielmehr haben müßte, wenn die Erde ein homogenes Ellipsoid wäre.

Um uns daher den auf der Erde stattfindenden Verhältnissen so viel als möglich zu nähern, müssen wir statt des wirklichen Erdellipsoids mit der Abplattung: $\frac{1}{310}$ ein anderes setzen, durch welches die Aenderung der Anziehung in einer der Meeresfläche gleichen ellipsoidschen Fläche demselben Gesetze folgt, wie auf der ohne Bewegung gedachten Erde. In §. 115 des zweiten Buches wurde gezeigt, daß wenn die Erde homogen wäre, ihre Abplattung $2\frac{1}{2}$ mal größer sein müßte, damit auf ihrer Oberfläche die gleiche Aenderung der Schwere vom Aequator bis zum Pol statthaben könnte. Dieses Verhältniß wird aber weniger groß werden, wenn es sich nicht um die Aenderung der Schwere auf der Oberfläche des homogenen Ellipsoids, sondern um die Aenderung auf der dieses homogene Ellipsoid umhüllenden geometrisch gedachten Erd-Oberfläche handelt, und es ist selbst noch zweifelhaft, ob in diesem Falle das einzuschaltende homogene Ellipsoid stärker abgeplattet sein muß, als die Erde, oder nicht.

Denken wir uns daher in das geometrische Erd-Ellipsoid A C A′, Fig. 14, ein anderes homogenes A E A′ von derselben Masse wie die Erde eingeschaltet, das den Aequator A A′ mit jenem gemeinschaftlich hat und stärker abgeplattet ist, und bezeichnen wir die halbe Erdachse CB mit R_0, die Abplattung der Erde mit $\frac{1}{2}\lambda_{,}^2$, die des neuen Ellipsoids mit $\frac{1}{2}\lambda^2$, so haben wir mit der bisherigen Annäherung, wie in dem kurz vorher genannten §. des zweiten Buches abgeleitet wurde:

$$\overline{CA} = A = R_0\left(1 + \frac{1}{2}\lambda_{,}^2\right),$$

$$\overline{CE} = C = \frac{A}{1+\frac{1}{2}\lambda^2} = R_0\left(1+\frac{1}{2}\lambda_{,}^2\right)\left(1-\frac{1}{2}\lambda^2\right) = R_0\left(1+\frac{1}{2}\lambda_{,}^2-\frac{1}{2}\lambda^2\right),$$

und der Werth der Componenten S in §. 115, Buch II gibt damit für die Anziehung in A, wo $r = A = R_0(1+\frac{1}{2}\lambda_{,}^2)$ ist, den Ausdruck:

$$S = \frac{G\,M\,R_0\,(1+\frac{1}{2}\lambda_{,}^2)}{R_0^3\,(1+\frac{1}{2}\lambda_{,}^2-\frac{1}{2}\lambda^2)^3}\left(1-\frac{6}{5}\lambda^2\right) = \frac{G\,M}{R_0^2}\left(1-\lambda_{,}^2+\frac{3}{10}\lambda^2\right).$$

Für die Anziehung in B hat man dann die dritte der obigen Gleichungen (f) anzuwenden, welche mit entsprechender Annäherung auf

$$Z = \frac{G\,M\,\zeta}{C'^3}\left(1-\frac{3}{5}\,\frac{\lambda^2\,C^2}{C'^2}\right)$$

zurückkommt, und in welcher noch C′ für $\zeta = R_0$, $r = 0$ zu bestimmen ist. Die Gleichung (g) wird aber für $r = 0$

$$(C'^2 = \zeta^2)\,(C'^2 + \lambda^2 C^2) = 0 \quad , \qquad C' = \zeta = R_0 \quad ;$$

man erhält dadurch bei gleicher Annäherung

$$Z = \frac{GM}{R_0^2}\left(1 - \frac{3}{5}\lambda^2\right) \quad ,$$

und damit folgt nach §. 115, Buch II die Proportion:

$$S:Z = \left(1 - \lambda_,^2 + \frac{3}{10}\lambda^2\right) : \left(1 - \frac{3}{5}\lambda^2\right) = 1 : 1{,}0017.. = 1 : \left(1 + \frac{1}{4}\lambda_,^2\right)$$

oder die Beziehung:

$$1 + \frac{1}{4}\lambda_,^2 = \frac{1 - \frac{3}{5}\lambda^2}{1 - \lambda_,^2 + \frac{3}{10}\lambda^2} \quad , \qquad \lambda^2 = \frac{5}{6}\lambda_,^2 \; .$$

Wir schließen daraus, daß das in die Erdoberfläche einzuschaltende homogene Ellipsoid etwas weniger stark abgeplattet sein muß, als diese selbst, und wir müssen demnach auch für ein solches Ellipsoid die Verhältnisse der anziehenden Wirkungen ermitteln. Dazu lassen wir jetzt die Umdrehungsachse CB beiden gemeinschaftlich sein und haben

$$\overline{BC} = R_0 = C \quad , \qquad \overline{AC} = R_0\left(1 + \frac{1}{2}\lambda_,^2\right) = A \quad ,$$

also wie vorher

$$Z = \frac{GM}{R_0^2}\left(1 - \frac{3}{5}\lambda^2\right) \; .$$

Setzen wir ferner in der Gleichung (g) $\zeta = 0$, $r = A = R_0(1 + \frac{1}{2}\lambda_,^2)$, $C = R_0$, so wird

$$C'^2 = R_0^2\,(1 + \lambda_,^2 - \lambda^2) \quad , \qquad C' = R_0\left(1 + \frac{1}{2}\lambda_,^2 - \frac{1}{2}\lambda^2\right) \quad ,$$

und damit ergibt sich das entsprechende S, dessen ursprüngliche Form nun

$$S = \frac{GMr}{C'^3}\left(1 - \frac{6}{5}\frac{\lambda^2 C^2}{C'^2}\right)$$

ist, für unsere Annäherung durch denselben Ausdruck wie oben; es bleibt also auch das Verhältniß S:Z dasselbe wie vorher, und demnach ist wieder

$$\lambda^2 = \frac{5}{6}\lambda_,^2 = \frac{5}{6}\,\frac{1}{150} = \frac{1}{180} \; .$$

Beachtet man dann, daß man nun in der Gleichung (t) $\lambda_,^2$ für λ^2 zu setzen hat, so kommt die Gleichung (s) auf

$$\frac{z_1 - z_0}{R_0} = \frac{3}{10}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda_,^2 + \varphi'^2 = \varphi'^2 - \frac{1}{4}\lambda_,^2$$

zurück und gibt mit den Werthen: $\lambda_,^2 = \frac{1}{150}$, $\varphi'^2 = \frac{1}{580}$

$$z_1 - z_0 = \left(\frac{1}{580} - \frac{1}{600}\right) R_0 = \frac{1}{17400} R_0 = 365,\ldots \text{ Meter};$$

es sind demnach die Niveauflächen der Atmosphäre am Aequator ungefähr 365^m oder etwas über 1200 Fuß mehr von der Meeresfläche entfernt als am Pol.

Um nun auch die vollständige Gleichung (55) den auf der Erde stattfindenden Verhältnissen entsprechend umzuformen, müssen wir die Lage eines Punktes der Atmosphäre durch seinen verticalen Abstand z von der Meeresfläche und durch seine geographische Breite β ausdrücken. Dazu sei M, Fig. 14, der betreffende Punkt, also $\overline{MC} = \mathfrak{r}$, die Normale Mm zur Meeresfläche $= z$, und der zum Fußpunkt m dieser Normalen gezogene Fahrstrahl des Erdellipsoides $\overline{Cm} = R_,$; es ist dann der Winkel $\widehat{ADm} = \beta$, und wenn man noch den Winkel $\widehat{ACm}$ mit $\omega_,$ bezeichnet, so hat man

$$\mathfrak{r}^2 = R_,^2 + z^2 + 2R_,z\cos(\beta - \omega_,) \quad ,$$

und mit Berücksichtigung der in §. 115, Buch II gefundenen Werthe:

$$\cos\beta = \cos\omega_,(1 - \lambda_,^2 \sin^2\omega_,) \quad , \quad \sin\beta = \sin\omega_,(1 + \lambda_,^2\cos^2\omega_,)$$

ergibt sich bei der hier statthabenden Annäherung

$$\cos(\beta - \omega_,) = 1 \quad , \quad \mathfrak{r} = R_, + z \quad ;$$

damit folgt aber, wenn $\widehat{MCA} = \omega$,

$$\omega = \beta \quad , \quad r = \mathfrak{r}\cos\omega = (R_, + z)\cos\beta \quad .$$

Ferner ist nach dem angeführten Orte

$$R_, = C\left(1 + \frac{1}{2}\lambda_,^2\cos^2\omega_,\right) = R_0\left(1 + \frac{1}{2}\lambda_,^2\cos^2\beta\right),$$

also wird

$$r = R_0\left(1+\frac{1}{2}\lambda_,^2 \cos^2\beta + \frac{z}{R_0}\right), \quad r = R_0 \cos\beta\left(1+\frac{1}{2}\lambda_,^2 \cos^2\beta + \frac{z}{R_0}\right).$$

Bezeichnen wir endlich noch die Fallbeschleunigung am Pol der Meeresfläche mit g_0, so gibt der im vorhergehenden §. erhaltene Werth von Z, welcher mit g_0 gleichbedeutend ist,

$$Z = g_0 = \frac{GM}{R_0^2}\left(1 - \frac{3}{5}\lambda^2\right) = \frac{GM}{R_0^2}\left(1 - \frac{1}{2}\lambda_,^2\right);$$

daraus folgt

$$GM = g_0 R_0^2 \left(1 + \frac{1}{2}\lambda_,^2\right),$$

und wir haben damit alle Factoren zu der gewünschten Umformung der Gleichung (55), in welcher λ^2 ebenfalls durch $\frac{1}{2}\lambda_,^2$ zu ersetzen ist.

Ich mache $\frac{z}{R_0} = u$ und bringe jene Gleichung auf die Form:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{Pg}{p}\,\mathrm{logn}\,\frac{P_0}{P} = g_0 R_0 (1+\tfrac{1}{2}\lambda_,^2)&\Bigg[\frac{1}{1+\frac{1}{2}\lambda_,^2\cos^2\beta_0+u_0} - \frac{1}{1+\frac{1}{2}\lambda_,^2\cos^2\beta+u} \\
&-\frac{1}{12}\lambda_,^2\left(\frac{2-3\cos^2\beta_0}{(1+\frac{1}{2}\lambda_,^2\cos^2\beta_0+u_0)^3} - \frac{2-3\cos^2\beta}{(1+\frac{1}{2}\lambda_,^2\cos^2\beta+u)^3}\right)\Bigg] \\
-\frac{1}{2}\varphi^2 R_0^2\big[(1+\tfrac{1}{2}\lambda_,^2\cos^2\beta&+u)^2\cos^2\beta - (1+\tfrac{1}{2}\lambda_,^2\cos^2\beta_0+u_0)^2\cos^2\beta_0\big],
\end{aligned}\right\}$$

welche mit den frühern Annäherungen zunächst auf folgende zurückkommt:

(56.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{Pg}{p}\,\mathrm{logn}\,\frac{P_0}{P} = g_0 R_0 (1+\tfrac{1}{2}\lambda_,^2)&\Bigg[\frac{\frac{1}{2}\lambda_,^2(\cos^2\beta-\cos^2\beta_0)+u-u_0}{1+\frac{1}{2}\lambda_,^2(\cos^2\beta+\cos^2\beta_0)+u+u_0} \\
&-\frac{1}{2}\lambda_,^2\,\frac{(1+\lambda_,^2)(\cos^2\beta-\cos^2\beta_0)+2(u-u_0)-3(u\cos^2\beta_0-u_0\cos^2\beta)}{1+\frac{1}{2}\lambda_,^2(\cos^2\beta+\cos^2\beta_0)+3(u+u_0)}\Bigg] \\
-\frac{1}{2}\varphi^2 R_0^2\big[(1+\lambda_,^2\cos^2\beta+2u)&\cos^2\beta - (1+\lambda_,^2\cos^2\beta_0+2u_0)\cos^2\beta_0\big].
\end{aligned}\right\}$$

Setzt man darin $u = u_0 = 0$, $\beta_0 = \frac{1}{2}\pi$, so findet man für das Gesetz, nach welchem sich der Luftdruck an der Meeresfläche ändern würde, wenn die Temperatur constant wäre, die Gleichung:

$$\frac{\mathbf{P}g}{\mathbf{p}} logn \frac{P_0}{P} = \frac{1}{2} g_0 R_0 cos^2\beta \left[\frac{1}{2}\lambda_{,}^2(1-\tfrac{1}{2}\lambda_{,}^2 sin^2\beta) - \frac{\varphi^2 R_0}{g_0}(1+\lambda_{,}^2 cos^2\beta)\right],$$

welche sich mit hinreichender Genauigkeit auf

$$\frac{\mathbf{P}g}{\mathbf{p}} logn \frac{P_0}{P} = \frac{1}{2} g_0 R_0 cos^2\beta \left(\frac{1}{2}\lambda_{,}^2 - \frac{\varphi^2 R_0}{g_0}\right)$$

zurückführen läßt und zeigt, daß der Luftdruck an der Meeresfläche bei constanter Temperatur constant wäre, wenn $\frac{1}{2}\lambda_{,}^2 = \frac{\varphi^2 R_0}{g_0}$, und daß bei der Erde, wo $\frac{1}{2}\lambda_{,}^2 = \frac{1}{300}$ kleiner ist als $\frac{\varphi^2 R_0}{g_0} = \frac{1}{290}$, der Luftdruck von den Polen, wo derselbe $= P_0$ ist, gegen den Aequator hin zunimmt. Für den Luftdruck P_1 am Aequator selbst hätte man unter der Voraussetzung einer constanten Temperatur und eines constanten Wassergehaltes der Luft

$$logn \frac{P_1}{P_0} = \frac{1}{2} \frac{g_0}{g} \frac{\mathbf{p} R_0}{\mathbf{P}} \left(\frac{\varphi^2 R_0}{g_0} - \frac{1}{2}\lambda_{,}^2\right),$$

und mit den Werthen:

$$g_0 = 9{,}83164 \;,\quad g = 9{,}809 \;,\quad \mathbf{p} = 1{,}299 \;,\quad \mathbf{P} = 10332^{Kgr.},$$
$$R_0 = 6356000^{m}$$

findet man darnach

$$logn \frac{P_1}{P_0} = 0{,}04617 \;,\qquad P_1 = P_0\, e^{0{,}04617} = 1{,}04723 \ldots P_0 \;,$$

und für eine beliebige Breite müßte man haben,

$$P = P_0\, e^{0{,}04617\, cos^2\beta}$$

Man hat aber auch allgemein zwischen dem Luftdruck und dem entsprechenden auf die Temperatur 0° C reduzirten Barometerstand die Beziehung (§. 20):

$$P = B\, \mathbf{w}_0\, (1 - 0{,}005188\, cos^2\beta) \;,$$

wenn $\mathbf{w}_0$ das geometrische Gewicht des Quecksilbers am Pol bezeichnet, und zieht daraus

$$\frac{P}{P_0} = \frac{B}{B_0}\,(1-0{,}005188\,cos^2\beta)\ .$$

Setzt man demnach für $e^{0{,}04617\,cos^2\beta}$ den angenäherten Werth: $1+0{,}0472\,cos^2\beta$, so folgt daraus

$$B = B_0\,(1+0{,}0524\,cos^2\beta)$$

als das Gesetz, welches die Barometerstände an der Meeresfläche befolgen müßten, wenn Temperatur und Wassergehalt der atmosphärischen Luft constant wären.

Macht man ferner in der Gleichung (56) $\beta_0=\beta$, um nur den Druck an zwei Orten zu vergleichen, die in derselben Verticalen liegen, so nimmt diese Gleichung die Form an:

$$\frac{\mathbf{P}g}{\mathbf{p}}\,logn\,\frac{P_0}{P} = g_0\,(z-z_0)\left[\frac{1+\frac{1}{4}\lambda_,^2}{1+\lambda_,^2cos^2\beta+u+u_0}-\frac{\varphi^2R_0}{g}\,cos^2\beta\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}\lambda_,^2\,\frac{(1+\frac{1}{4}\lambda_,^2)\,(2-3\,cos^2\beta)}{1+3\lambda_,^2cos^2\beta+3\,(u+u_0)}\right]$$

und kommt dann unter Vernachlässigung der Glieder, welche den Factor $\lambda_,^4$ oder das Product $\lambda_,^2\,(u+u_0)$ enthalten, auf den einfachen Ausdruck:

$$logn\,\frac{P_0}{P} = \frac{\mathbf{p}\,g_0}{\mathbf{P}\,g}\left[1-\left(\frac{1}{4}\lambda_,^2+\frac{\varphi^2R_0}{g_0}\right)cos^2\beta\right]\frac{z-z_0}{1+\frac{z+z_0}{R}}$$

zurück, welcher wieder ganz mit der Gleichung (41) übereinstimmt, wenn in dieser unter $\mathbf{p}$ der Werth:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0\,(1-0{,}002587\,cos^2\beta)$$

verstanden wird, während in der vorstehenden Gleichung $\mathbf{p}$ und g sich auf eine beliebige Breite beziehen können; denn man wird sich leicht überzeugen, daß der Factor:

$$g_0\left[1-\left(\frac{1}{4}\lambda_,^2+\frac{\varphi^2R_0}{g_0}\right)cos^2\beta\right]$$

die wirkliche Intensität der Schwere an der Meeresfläche der in Rotation begriffenen Erde ausdrückt und mit dem Werthe (g) in §. 20. gleichbedeutend ist.

Unter Zulassung der bei der vorhergehenden Ableitung stattgegebenen Vernachlässigungen, welche offenbar neben der Ungewißheit über die Temperatur-Verhältnisse und den Wassergehalt der Luft bestehen können, ist also durch diese Untersuchung die von einer beschränkteren Voraussetzung ausgehende Ableitung der Gleichung (41) in §. 19 unter den in §. 20 angegebenen Beschränkungen und mit den daraus gezogenen Folgerungen vollständig gerechtfertigt.

§. 30.

Für den allgemeinsten Fall, wo die Flüssigkeit eine fortschreitende und drehende Bewegung besitzt, erhalten wir nach dem, was in §. 24 gesagt wurde, für das innere Gleichgewicht die Gleichungen:

$$57.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dP}{d\xi} = q\hat{\Xi} - \mathfrak{X} \;,\quad \dfrac{dP}{d\eta} = q\hat{H} - \mathfrak{Y} \;, \\ \qquad\qquad \dfrac{dP}{d\zeta} = q\hat{Z} - \mathfrak{Z} \;, \end{array} \right.$$

worin die Größen $\hat{\Xi}$, $\hat{H}$, $\hat{Z}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die in §. 45 des dritten Buches angegebene Bedeutung haben. Die Form der drei letzten Componenten, nämlich

$$\mathfrak{X} = q\left[\zeta\frac{d\mathfrak{q}}{dt} - \eta\frac{d\mathfrak{r}}{dt} + \mathfrak{p}(\mathfrak{q}\eta + \mathfrak{r}\zeta) - (\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2)\xi\right] \;,$$

u. s. f.

zeigt aber, daß dauerndes inneres Gleichgewicht nicht wohl bestehen kann, wenn die Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ nicht constant sind. Ist dieses aber der Fall, so hat auch die Drehungsachse eine bestimmte Lage in dem System und kann als eine der Coordinaten-Achsen genommen werden. Nehmen wir sie als ζ-Achse, so wird, $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} = 0$, $\mathfrak{r} = \varphi$, und wir haben einfach

$$\mathfrak{X} = -q\varphi^2\xi \;,\quad \mathfrak{Y} = -q\varphi^2\eta \;,\quad \mathfrak{Z} = 0 \;.$$

Dieselbe Voraussetzung: $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} = \mathfrak{r} = const$ führt aber auch durch die Beziehungen zwischen diesen Winkelgeschwindigkeiten und den Winkeln λ, μ, ν, welche die Lage der Drehungsachse in Bezug auf feste oder parallel fortschreitende Coordinaten-Achsen bestimmen (II. Buch,

§. 188), zu der Folgerung: $\lambda = \mu = \nu = const$, d. h. zu der Folgerung, daß die Drehungsachse immer mit sich parallel bleiben muß.

Man wird dann ferner aus der Ableitung in §. 45 des dritten Buches erkennen, daß die Componenten $\widehat{\Xi}$, $\widehat{H}$, $\widehat{Z}$ aus den Componenten der auf ein Flüssigkeitstheilchen wirkenden äußeren Kraft und der im entgegengesetzten Sinne genommenen Beschleunigungen des Anfangspunktes der $\xi\,\eta\,\zeta$, parallel zu den Achsen der ξ, η und ζ zusammengesetzt sind, und daß man daher

$$\widehat{\Xi} = \Xi - \frac{d^2\widehat{\xi}}{dt^2}\ ,\qquad \widehat{H} = H - \frac{d^2\widehat{\eta}}{dt^2}\ ,\qquad \widehat{Z} = Z - \frac{d^2\widehat{\zeta}}{dt^2}$$

schreiben kann, wenn $\widehat{\xi}$, $\widehat{\eta}$, $\widehat{\zeta}$ die Coordinaten des Anfangspunktes der mit der Flüssigkeitsmasse sich drehenden Achsen der $\xi\,\eta\,\zeta$ in Bezug auf ein diesen Achsen paralleles Coordinatensystem bezeichnen.

Mit diesen Werthen nehmen nun die Gleichungen (57) die Form an:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dP}{d\xi} = q\left(\Xi - \frac{d^2\widehat{\xi}}{dt^2} + \varphi^2\xi\right),\quad \frac{dP}{d\eta} = q\left(H - \frac{d^2\widehat{\eta}}{dt^2} + \varphi^2\eta\right),\\ &\qquad\qquad \frac{dP}{d\zeta} = q\left(Z - \frac{d^2\widehat{\zeta}}{dt^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (58.$$

und geben, nach der frühern Weise behandelt, die Differential-Gleichung für die Niveauflächen:

$$\left(\Xi - \frac{d^2\widehat{\xi}}{dt^2} + \varphi^2\xi\right)\frac{d\xi}{ds} + \left(H - \frac{d^2\widehat{\eta}}{dt^2} + \varphi^2\eta\right)\frac{d\eta}{ds} + \left(Z - \frac{d^2\widehat{\zeta}}{dt^2}\right)\frac{d\zeta}{ds} = 0 \quad (59.$$

und das Aenderungsgesetz des geometrischen Druckes:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP}{ds} = q\Bigg[&\left(\Xi - \frac{d^2\widehat{\xi}}{dt^2} + \varphi^2\xi\right)\frac{d\xi}{ds} + \left(H - \frac{d^2\widehat{\eta}}{dt^2} + \varphi^2\eta\right)\frac{d\eta}{ds}\\ &+ \left(Z - \frac{d^2\widehat{\zeta}}{dt^2}\right)\frac{d\zeta}{ds}\Bigg], \end{aligned}\right\} \quad (60.$$

und mit dem letztern durch die Bedingung der Integrabilität zugleich die Bedingung des dauernden Gleichgewichtes.

Nach der vorhergehenden Annahme, daß die Winkelgeschwindigkeit der drehenden Bewegung und die Richtung der Drehungsachse constant ist, wird man aber die z-Achse parallel zu dieser Drehungsachse nehmen und hat dann einfach

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{d^2X}{dt^2}\cos\omega + \frac{d^2Y}{dt^2}\sin\omega\,, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= \frac{d^2Y}{dt^2}\cos\omega - \frac{d^2X}{dt^2}\sin\omega\,, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \frac{d^2Z}{dt^2}\,. \end{aligned}\right.$$

Es ist aber auch $\omega = \varphi t$, und man wird dadurch leicht zu der Folgerung gelangen, daß selbst bei constanter Winkelgeschwindigkeit nur in wenigen Fällen die Gleichungen (59) und (60) von der Zeit t unabhängig werden und ein dauernder innerer Gleichgewichtszustand bestehen kann, wenn die Drehungsachse eine andere fortschreitende Bewegung besitzen soll, als eine geradlinige gleichförmige.

Zu diesen wenigen Fällen gehört derjenige, wenn die Drehungsachse nur in ihrer Richtung selbst eine fortschreitende und zwar eine gleichförmig veränderte Bewegung besitzen soll, weil dann $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ und $\frac{d^2\eta}{dt^2}$ Null werden und $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ constant ist. Es wäre dieses der Fall, wenn eine schwere Flüssigkeit in einem um eine verticale Achse rotirenden Gefäß eine gleichförmig beschleunigte steigende oder sinkende Bewegung erhält, wie bei dem ersten in §. 23 betrachteten Beispiel, und man wird nach den bisher ausgeführten speciellen Untersuchungen leicht zu dem Schluß gelangen, daß bei dieser Bewegung die Niveauflächen Umdrehungsparaboloide sind, wie bei einer festen verticalen Drehungsachse (§. 25), deren Parameter nun aber nicht $\frac{g}{\varphi^2}$, sondern $\frac{g+c}{\varphi^2}$ ist, wenn c die verticale, im Sinne der aufwärts gerichteten positiven ζ genommene Beschleunigung des Gefäßes ist, und daß alle übrigen in §. 25 abgeleiteten Beziehungen auch für den jetzigen Fall bestehen, wenn man darin $g + c$ für g substituirt.

Wenn das Gefäß frei niederfällt, hat man $c = -g$ und die Niveauflächen gehen in verticale Cylinderflächen über; das Gefäß muß

dann von oben und unten geschlossen sein, wenn die Flüssigkeit darin bleiben soll, und beide Böden erleiden gleichen Druck.

Diese Verhältnisse bleiben im Allgemeinen auch dieselben, wenn sich ein Punkt der immer verticalen Drehungsachse in einer Parabel bewegt, deren Achse vertical gerichtet, und zwar so daß die zu dieser Achse senkrechte Geschwindigkeit constant ist.

Ein weiterer einfacher Fall, der im Grunde aber auf den in §. 25 behandelten zurückkommt, ist der, wenn sich die verticale Achse des mit einer schweren tropfbaren Flüssigkeit gefüllten Gefäßes in einer constanten Entfernung r um eine feste verticale Achse dreht, und zwar mit derselben constanten Winkelgeschwindigkeit φ, mit der sich das Gefäß mit der Flüssigkeit um seine Achse dreht. Man hat dann

$$X = r\cos\omega \ , \quad Y = r\sin\omega \ , \quad \frac{d^2X}{dt^2} = -r\varphi^2\cos\omega \ , \quad \frac{d^2Y}{dt^2} = -r\varphi^2\sin\omega \ ;$$

daraus folgt

$$\frac{d^2\widehat{\xi}}{dt^2} = -r\varphi^2 \ , \quad \frac{d^2\widehat{\eta}}{dt^2} = 0 \ ,$$

und die Gleichung (59) wird

$$r\varphi^2\frac{d\xi}{ds} + \varphi^2\left(\xi\frac{d\xi}{ds} + \eta\frac{d\eta}{ds}\right) - g\frac{d\zeta}{ds} = 0 \ .$$

Man erhält damit für die Niveauflächen die Gleichung:

$$2r\varphi^2\xi + \varphi^2(\xi^2 + \eta^2) - 2g\zeta = C \ ,$$

welche mit der Gleichung (a) in §. 25 gleichbedeutend ist und deren Form annimmt, wenn man darin $\xi' - r$ für ξ substituirt, d. h. den Anfangspunkt der ξ in die feste Drehungsachse verlegt, wie es dort der Fall war.

Zweiter Abschnitt.

Innere Bewegung eines flüssigen Systems.

I. Fließende Bewegung bei äußerem Gleichgewicht.

§. 31.

Bei der Bewegung flüssiger Systeme unterscheiden wir zwischen der fließenden Bewegung oder derjenigen, bei welcher die Flüssigkeitstheilchen ihre Lage gegen die sie umgebenden festen Körper oder Gefäßwände und zugleich auch ihre gegenseitigen Lagen sehr wesentlich ändern, und zwischen der oscillirenden Bewegung oder derjenigen, bei welcher die Flüssigkeitstheilchen nur sehr kleine Aenderungen ihrer gegenseitigen Lage erleiden und daher in keine neue ähnliche Gleichgewichtszustände zu andern Flüssigkeitstheilchen treten, sondern immer in ihre ursprüngliche Gleichgewichtslage zurückzukehren streben und daher nur um diese Gleichgewichtslage oscilliren.

Die fließende Bewegung werden wir wie das Gleichgewicht unter zwei Gesichtspunkten behandeln, nämlich zuerst unter Voraussetzung eines äußern Gleichgewichts- oder Ruhe-Zustandes und dann unter der Voraussetzung einer bestimmten äußern Bewegung der ganzen Flüssigkeitsmasse. Für die oscillirende Bewegung dagegen werden wir uns nur auf den ersten Gesichtspunkt beschränken und demnach die ganze oscillirende Flüssigkeitsmasse äußerlich als unbewegt annehmen.

Bei der fließenden Bewegung können die kleinen inneren Kräfte S_x, S_y, S_z, welche sich dem Verschieben und Uebereinanderweggleiten der Flüssigkeitstheilchen widersetzen, in erster Annäherung als verschwindend klein angesehen werden im Verhältniß zu den Kräften T_x, T_y, T_z, welche der directen Annäherung der Flüssigkeitstheilchen

widerstreben, und zu den äußern Kräften, welche auf diese Flüssigkeitstheilchen wirken und die fließende Bewegung hervorrufen, und zwar wird diese Annahme um so mehr zugelassen werden können, je weniger die betreffende Flüssigkeit die Eigenschaft der Zähflüssigkeit und Klebrigkeit besitzt, und je weiter sie von demjenigen Temperaturzustand entfernt ist, bei welchem sie in die feste Aggregatform übergeht.

Die Erfahrung zeigt indessen, daß sich jene Kräfte S auch bei den allergewöhnlichsten Erscheinungen der fließenden Bewegung fühlbar machen, und zwar namentlich dadurch, daß wegen der starken Adhäsion der Flüssigkeitstheilchen zu den Gefäßwänden an diesen eine unbewegte Flüssigkeitsschichte haftet, an welcher die übrigen Flüssigkeitstheilchen während der Bewegung vorbeigleiten müssen, und daß diese durch die Kräfte S eine Verminderung ihrer Geschwindigkeit erleiden, welche, wenn auch ziemlich klein, durch die Beobachtung leicht nachgewiesen werden kann. Eine Theorie, welche auf eine nahe Uebereinstimmung mit der Erfahrung Anspruch macht, könnte daher nur mit Berücksichtigung der Kräfte S aus den vollständigen Gleichungen (78) des vorhergehenden Buches abgeleitet werden; bei dem dermaligen Zustande der Analysis dürfte aber eine solche Theorie um so mehr noch auf bedeutende Schwierigkeiten stoßen, als es bis jetzt selbst ohne Berücksichtigung der Kräfte S und in den einfachsten Fällen nicht möglich war, eine vollständige Theorie von der Bewegung einer Flüssigkeit zu geben. Es ist daher vorerst kein anderes Mittel übrig, als sich mit der oben angedeuteten ersten Annäherung an eine solche Theorie zu begnügen und diese angenäherte Theorie durch die Erfahrung zu corrigiren, weßhalb denn auch die Lehre von der fließenden Bewegung einer Flüssigkeit, die Hydraulik, bis jetzt nur eine Sammlung von Formeln ist, welche sich auf Resultate der Erfahrung und auf theoretische Muthmaßungen stützen und von einer rationellen Begründung noch weit entfernt sind.

§. 32.

Die Gesetze der fließenden Bewegung eines flüssigen Systems sind in den allgemeinsten Gleichungen der Bewegung eines stetigen veränderlichen Systems ausgesprochen, welche im vorhergehenden Buche abgeleitet wurden, nur mit der annähernden Vereinfachung, daß in denselben die Kräfte S_x, S_y, S_z gleich Null genommen werden dürfen, und daß $T_x = T_y = T_z = -P$ wird. Beziehen wir also die Bewegung auf ein unbewegtes Coordinatensystem, so sind diese Gleichungen folgende:

$$61.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} + q\left(\dfrac{d.u_x}{dt} - X\right) = 0\ , \quad \dfrac{\partial P}{\partial y} + q\left(\dfrac{d.u_y}{dt} - Y\right) = 0\ , \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} + q\left(\dfrac{d.u_z}{dt} - Z\right) = 0\ . \end{cases}$$

Mit diesen Gleichungen ist dann noch die in §. 35 des dritten Buches abgeleitete sogenannte Stetigkeits-Gleichung:

$$62^a.)\qquad \frac{dq}{dt} + \frac{\partial . q u_x}{\partial x} + \frac{\partial . q u_y}{\partial y} + \frac{\partial . q u_z}{\partial z} = 0$$

und die aus der besondern Beschaffenheit der Flüssigkeit folgende Beziehung:

$$63^a.)\qquad q = f(P)$$

zwischen dem geometrischen Druck und der Dichte zu verbinden, wenn diese von dem Drucke abhängig ist. Wird dieses aber nicht vorausgesetzt, wird vielmehr die Flüssigkeit als unzusammendrückbar angenommen, so hat man dafür die Bedingung:

$$63^b.)\qquad \frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0\ ,$$

welche ausspricht (Buch III, §. 35), daß die Aenderung der geometrischen Raumausdehnung in Bezug auf die Zeit Null ist, und mit dieser Bedingung kommt die Gleichung (62^a) auf die Bedingung:

$$62^b.)\qquad \frac{dq}{dt} + u_x \frac{\partial q}{\partial x} + u_y \frac{\partial q}{\partial y} + u_z \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{d.q}{dt} = 0$$

zurück, nach welcher auch die Aenderung der Dichte mit der Zeit oder durch die Bewegung Null sein muß.

Die fünf Gleichungen (61), (62^a) und (63^a) oder (61), (62^b) und (63^b) würden ihrer Zahl nach gerade hinreichen, um die fünf Unbekannten: u_x, u_y, u_z, P und q zu bestimmen, und dann mit Hülfe der Beziehungen: $u_x = \frac{dx}{dt}$, u. s. f. auch die Coordinaten x, y, z eines Flüssigkeitstheilchens in Function der Zeit auszudrücken und durch Elimination der letztern die Gleichungen der Bahn desselben abzuleiten, also die Gesetze der Bewegung für jedes einzelne Flüssigkeitstheilchen, dessen anfänglicher Zustand als bekannt vorausgesetzt wird, anzugeben, wenn die Integration jener fünf Gleichungen für gegebene

Werthe von X, Y, Z allgemein und in bestimmten geschlossenen Functionen durchführbar wäre. Das letztere, die Integration in bestimmten Functionen ist schon wegen der theilweisen Aenderungsgesetze: $\frac{\delta P}{\delta x}$, $\frac{\delta P}{\delta y}$, $\frac{\delta . q u_x}{\delta x}$, u. s. f. nicht möglich, und es liegt auch in der Natur flüssiger Systeme, daß die Bewegung der einzelnen Theilchen für dieselben äußern Kräfte je nach den anfänglichen Zuständen eine sehr verschiedene sein und daher nicht durch bestimmte Functionen, sondern nur durch allgemeine Arten von Functionen ausgedrückt werden kann, wie wir dieß im vorhergehenden Buche auch bei den sehr kleinen Bewegungen veränderlicher Systeme gesehen haben. Allein die Analysis ist überhaupt bis jetzt nicht dahin gelangt, aus den vorhergehenden fünf Gleichungen ein allgemeines Resultat zu ziehen; nur unter einer besondern Voraussetzung über die Geschwindigkeits-Componenten u_x, u_y, u_z konnte man die drei Gleichungen (61) zu einer einzigen vereinigen, welche unter integrirbarer Form erscheint.

Setzt man nämlich voraus, daß die Geschwindigkeitscomponenten während der Bewegung immer die theilweisen Aenderungsgesetze einer bestimmten Function $\psi(x, y, z, t)$ von x, y, z und t, je nach x, y und z seien, so daß man hat

$$u_x = \frac{\delta \psi(x, y, z, t)}{\delta x}, \quad u_y = \frac{\delta \psi}{\delta y}, \quad u_z = \frac{\delta \psi}{\delta z}, \quad \text{(a.}$$

also auch

$$u_x \frac{\delta x}{\delta s} + u_y \frac{\delta y}{\delta s} + u_z \frac{\delta z}{\delta s} = \frac{\delta \psi}{\delta s}$$

und

$$\frac{\delta u_x}{\delta y} = \frac{\delta u_y}{\delta x}, \quad \frac{\delta u_x}{\delta z} = \frac{\delta u_z}{\delta x}, \quad \frac{\delta u_y}{\delta z} = \frac{\delta u_z}{\delta y}; \quad \text{(b.}$$

und multiplizirt man die Gleichungen (61), nachdem man den vollständigen Aenderungsgesetzen: $\frac{d . u_x}{dt}$, $\frac{d . u_y}{dt}$, $\frac{d . u_z}{dt}$ die entwickelte Form:

$$\frac{d . u_x}{dt} = \frac{d u_x}{dt} + u_x \frac{\delta u_x}{\delta x} + u_y \frac{\delta u_x}{\delta y} + u_z \frac{\delta u_x}{\delta z}, \quad \text{(c.}$$

u. s. f.

gegeben und diese Gleichungen mit Beachtung der drei Bedingungen (b) unter die Form:

$$\begin{cases} \frac{1}{q}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{d u_x}{dt} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x} = X \\ \frac{1}{q}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{d u_y}{dt} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial y} = Y \\ \frac{1}{q}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{d u_z}{dt} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial z} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial z} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = Z \end{cases}$$

gebracht hat, der Reihe nach mit $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}$, indem man unter s eine Veränderliche versteht, welche von der Zeit unabhängig ist, und von welcher x, y und z nach willkürlichen Functionen abhängen, und nimmt dann die Summe der Producte, so findet man zunächst die Gleichung:

$$\frac{1}{q}\frac{\partial P}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial(u_x^2+u_y^2+u_z^2)}{\partial s} + \frac{d u_x}{dt}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{d u_y}{dt}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{d u_z}{dt}\frac{\partial z}{\partial s}$$
$$= X\frac{\partial x}{\partial s} + Y\frac{\partial y}{\partial s} + Z\frac{\partial z}{\partial s} ,$$

und wenn man dann ferner beachtet, daß man hat

$$\frac{d u_x}{dt} = \frac{d\,.\,\frac{\partial \psi}{\partial x}}{dt} = \frac{\partial\,.\,\frac{d\psi}{dt}}{\partial x} , \quad \text{u. s. f.}, \quad u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = v^2 ,$$

und wenn man zuletzt noch die Voraussetzung zuläßt, daß $X\frac{\partial x}{\partial s} + Y\frac{\partial y}{\partial s} + Z\frac{\partial z}{\partial s}$ das vollständige Aenderungsgesetz einer Function $F(x, y, z)$ nach jeder beliebigen Veränderlichen s sei, von welcher man sich x, y, z willkürlich abhängig denkt, so ergibt sich die gesuchte Beziehung:

$$64.)\quad \frac{1}{q}\frac{\partial P}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial\,.\,v^2}{\partial s} + \frac{\partial\,.\,\frac{d\psi}{dt}}{\partial s} = \frac{\partial\,.\,F(x, y, z)}{\partial s} ,$$

welche allgemein integrirt werden kann, wenn die Function (69*) gegeben ist.

Es ist aber einleuchtend, daß diese Gleichung nur eine sehr beschränkte Anwendung gestatten kann, da sie auf einer bestimmten Voraussetzung über die Geschwindigkeits-Componenten beruht, von deren Stattfinden man sich doch nur durch die Gesetze der Bewegung selbst überzeugen kann. Lagrange hat zwar zu beweisen gesucht, daß diese Voraussetzung immer statthaben müsse, wenn sie am Anfang der Bewegung, also allgemein in irgend einem Augenblick statthabe; allein daß dieser Beweis, welchen Duhamel ohne Beschränkung wieder producirt *), obgleich schon Poisson Bedenken dagegen erhoben hat **), und welcher darauf hinausgeht, zu beweisen, daß wenn jene Voraussetzung am Ende der Zeit t stattfinde, sie auch am Ende der Zeit t + ε stattfinden müsse, wenn ε eine unendlich kleine Zeit bezeichnet, nicht stichhaltig sein kann, geht schon daraus hervor, daß wenn der obige Satz richtig wäre, die durch die Gleichungen (a) ausgedrückte Eigenschaft bei jeder Bewegung statthaben müßte, welche einem in Ruhe oder in geradliniger gleichförmiger Bewegung begriffenen flüssigen System durch irgend beliebige Kräfte ertheilt werden kann, und welche Bewegung wäre es, die von diesen anfänglichen Zuständen aus nicht hervorgerufen werden könnte? Es müßte folglich jene Voraussetzung für alle Bewegungen statthaben.

Nehmen wir aber z. B. eine schwere Flüssigkeit, welche in einem um eine verticale Achse drehbaren Gefäß mit diesem in Ruhe ist, so unterliegt es keinem Zweifel, daß diese Flüssigkeit durch eine gleichförmige drehende Bewegung des Gefäßes nach kurzer Zeit von der Ruhe aus ebenfalls in eine gleichförmig drehende Bewegung versetzt werden kann, so daß alle Flüssigkeitstheilchen sich in horizontalen Kreisen und mit der gemeinschaftlichen constanten Winkelgeschwindigkeit um die Drehungsachse bewegen. In diesem Bewegungszustand hat man aber, wenn die Drehungsachse als z-Achse genommen wird und φ die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet,

$$u_x = -\varphi y \;,\quad u_y = \varphi x \;,\quad u_z = 0$$

und demnach

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = -\varphi \;,\quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = +\varphi \;;$$

*) *Duhamel*, Cours de mécanique, II. §. 175.

**) *Poisson*, Traité de mécanique, II. §. 654.

die erste der Bedingungen (b) wird also nicht befriedigt, und die Voraussetzung (a) kann nicht statthaben. Es ist also der von Lagrange aufgestellte Satz unrichtig.

§. 33.

Wenn sich nun auch keine allgemeine integrirbare Gleichung aus den Gleichungen (61) ableiten läßt, so kann man doch eine Gleichung erhalten, welche eine wichtige Interpretation zuläßt, und die selbst für bestimmte Richtungen, nach welchen man in der Flüssigkeit fortgeht, integrirbar ist.

Bezeichnet man nämlich den Weg, welchen ein Flüssigkeitstheilchen, dessen Lage am Ende der Zeit t durch die Coordinaten x, y, z bestimmt wird, von diesem Punkte an während der Zeit Δt zurücklegt, mit Δs, so daß man hat

$$\frac{1}{v} = \frac{dt}{ds}, \quad \frac{u_x}{v} = \frac{dx}{ds}, \quad \frac{u_y}{v} = \frac{dy}{ds}, \quad \frac{u_z}{v} = \frac{dz}{ds},$$

so werden die Veränderlichen t, x, y, z für dieses Flüssigkeitstheilchen bestimmte Functionen von s, und es wird demnach das vollständige Aenderungsgesetz einer Veränderlichen, welche eine Function der vier unabhängigen Veränderlichen t, x, y, z ist, wie z. B. die Geschwindigkeit v eines beliebigen Flüssigkeitstheilchens, in Bezug auf jenes bestimmte s genommen, aus vier theilweisen Aenderungsgesetzen gebildet sein, und man wird z. B. haben

$$\text{d.)} \quad \frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dt}\frac{dt}{ds} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{ds}.$$

Bezeichnen wir dann ferner den gerad= oder krummlinigen Abstand eines zweiten Flüssigkeitstheilchens von dem ersten mit $\Delta s_{,}$, so werden die willkürlichen Uebergangsgesetze: $\frac{\partial x}{\partial s_{,}}$, $\frac{\partial y}{\partial s_{,}}$, $\frac{\partial z}{\partial s_{,}}$ die Cosinus dreier Winkel zwischen der Richtung, nach welcher man von dem Punkte oder Flüssigkeitstheilchen x y z zu einem andern übergehen will, und den Coordinaten=Achsen ausdrücken, und diese Uebergangsgesetze werden mit den Aenderungsgesetzen $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ identisch werden, wenn man von dem Punkte x y z in der Richtung fortgeht, in welcher sich dieses Flüssigkeitstheilchen gerade bewegt.

Ersetzen wir nun in den Gleichungen (61) die vollständigen Aenderungsgesetze $\frac{d \cdot u_x}{dt}$, $\frac{d \cdot u_y}{dt}$, $\frac{d \cdot u_z}{dt}$ durch ihre Entwickelungen (c), bringen die partiellen Aenderungsgesetze: $\frac{du_x}{dt}$, $\frac{du_y}{dt}$, $\frac{du_z}{dt}$ nach dem Vorhergehenden auf die Form:

$$v \frac{du_x}{dt} \frac{dt}{ds} \;, \quad v \frac{du_y}{dt} \frac{dt}{ds} \;, \quad v \frac{du_z}{dt} \frac{dt}{ds}$$

und ersetzen die Factoren u_x, u_y, u_z der Uebergangsgesetze $\frac{\partial u_x}{\partial x}$, $\frac{\partial u_x}{\partial y}$, u. s. f. durch $v \frac{dx}{ds}$, $v \frac{dy}{ds}$, $v \frac{dz}{ds}$, so wird

$$\frac{d \cdot u_x}{dt} = v \left(\frac{du_x}{dt} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{ds} \right) ,$$

also mit Berücksichtigung der Entwickelung (d) in der abgekürzten wie in der entwickelten Form

$$\frac{d \cdot u_x}{dt} = v \frac{d \cdot u_x}{ds} \;, \quad \frac{d \cdot u_y}{dt} = v \frac{d \cdot u_y}{ds} \;, \quad \frac{d \cdot u_z}{dt} = v \frac{d \cdot u_z}{ds} \;.$$

Es ist aber auch

$$\frac{du_x}{ds} = \frac{d \cdot v \frac{dx}{ds}}{ds} = \frac{dx}{ds} \frac{dv}{ds} + v \frac{d \cdot \frac{dx}{ds}}{ds} = \frac{dx}{ds} \frac{dv}{ds} + v \varkappa \cos \lambda \;,$$

$$\frac{du_y}{ds} = \frac{d \cdot v \frac{dy}{ds}}{ds} = \frac{dy}{ds} \frac{dv}{ds} + v \frac{d \cdot \frac{dy}{ds}}{ds} = \frac{dy}{ds} \frac{dv}{ds} + v \varkappa \cos \mu \;,$$

$$\frac{du_z}{ds} = \frac{d \cdot v \frac{dz}{ds}}{ds} = \frac{dz}{ds} \frac{dv}{ds} + v \frac{d \cdot \frac{dz}{ds}}{ds} = \frac{dz}{ds} \frac{dv}{ds} + v \varkappa \cos \nu \;,$$

wenn $\varkappa$ die Krümmung der von dem Flüssigkeitstheilchen $x\,y\,z$ beschriebenen Bahn bezeichnet, und λ, μ, ν die Winkel sind, welche ihre Richtung mit den Coordinatenachsen einschließt, und damit nehmen die Gleichungen (61) die Form an:

$$65.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{q}\,\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{d\,.\,v^2}{ds}\,\dfrac{dx}{ds} + v^2 \varkappa \cos\lambda = X\ , \\[2ex] \dfrac{1}{q}\,\dfrac{\partial P}{\partial y} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{d\,.\,v^2}{ds}\,\dfrac{dy}{ds} + v^2 \varkappa \cos\mu = Y\ , \\[2ex] \dfrac{1}{q}\,\dfrac{\partial P}{\partial z} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{d\,.\,v^2}{ds}\,\dfrac{dz}{ds} + v^2 \varkappa \cos\nu = Z\ . \end{cases}$$

Multiplizirt man endlich diese Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{\partial x}{\partial s_1}, \frac{\partial y}{\partial s_1}, \frac{\partial z}{\partial s_1}$ und nimmt die Summe der Produkte, so erhält man die Gleichung:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{q}\,\dfrac{\partial P}{\partial s_1} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{d\,.\,v^2}{ds}\left(\dfrac{dx}{ds}\,\dfrac{\partial x}{\partial s_1} + \dfrac{dy}{ds}\,\dfrac{\partial y}{\partial s_1} + \dfrac{dz}{ds}\,\dfrac{\partial z}{\partial s_1}\right) \\[2ex] + v^2 \varkappa \left(\dfrac{\partial x}{\partial s_1}\cos\lambda + \dfrac{\partial y}{\partial s_1}\cos\mu + \dfrac{\partial z}{\partial s_1}\cos\nu\right) = X\dfrac{\partial x}{\partial s_1} + Y\dfrac{\partial y}{\partial s_1} + Z\dfrac{\partial z}{\partial s_1}\ . \end{cases}$$

Diese nimmt aber eine sehr einfache Form an, wenn man beachtet, 1) daß

$$\frac{dx}{ds}\,\frac{\partial x}{\partial s_1} + \frac{dy}{ds}\,\frac{\partial y}{\partial s_1} + \frac{dz}{ds}\,\frac{\partial z}{\partial s_1} = \cos\omega_1$$

den Cosinus des Winkels ω_1 ausdrückt, welchen die Richtung der Bewegung des Flüssigkeitstheilchens x y z mit der Richtung bildet, nach welcher man von diesem Theilchen zu einem andern übergeht, 2) daß ebenso

$$\frac{\partial x}{\partial s_1}\cos\lambda + \frac{\partial y}{\partial s_1}\cos\mu + \frac{\partial z}{\partial s_1}\cos\nu = \cos\omega_2$$

den Cosinus des Winkels ω_2 ausdrückt, welchen dieselbe Uebergangs-Richtung mit der Richtung der Krümmung oder mit dem Krümmungshalbmesser der Bahn des Flüssigkeitstheilchens x y z einschließt, und 3) daß die rechte Seite der vorstehenden Gleichung die Projection der äußern geometrischen Kraft R auf dieselbe Uebergangsrichtung vorstellt, so daß man schreiben kann

$$X\frac{\partial x}{\partial s_1} + Y\frac{\partial y}{\partial s_1} + Z\frac{\partial z}{\partial s_1} = R\cos\chi = R\,\frac{\partial r}{\partial s_1}\ ;$$

die obige Gleichung wird damit

$$\frac{1}{q}\frac{\delta P}{\delta s_{,}} + \frac{1}{2}\frac{d\,.\,v^2}{d\,s} \cos\omega_1 + v^2\varkappa \cos\omega_2 = R\frac{\delta r}{\delta s_{,}}, \quad (66.$$

und ihre Bedeutung fällt so unmittelbar in die Augen.

Um aber diese Bedeutung auszusprechen, wollen wir die beiden Fälle zusammendrückbarer und nicht zusammendrückbarer Flüssigkeiten getrennt betrachten. Im letztern Falle hat man zufolge der Gleichung (62^b)

$$\frac{d\,.\,q}{d\,s} = \frac{d\,.\,q}{d\,t}\frac{d\,t}{d\,s} = \left(\frac{dq}{d\,t} + \frac{\delta q}{\delta x}u_x + \frac{\delta q}{\delta y}u_y + \frac{\delta q}{\delta z}u_z\right)\frac{d\,t}{d\,s} = 0$$

und demnach auch

$$\frac{1}{2}q\frac{d\,.\,v^2}{d\,s} = \frac{1}{2}\,.\,\frac{d\,.\,q\,v^2}{d\,s},$$

und die Gleichung (66) kann die Form erhalten:

$$\frac{\delta P}{\delta s} + \frac{1}{2}\frac{d\,.\,q\,v^2}{d\,s} \cos\omega_1 + q\,v^2\varkappa \cos\omega_2 = q\,R\frac{\delta r}{\delta s_{,}}. \quad (67^a.$$

Erwägt man nun, daß $\frac{\delta P}{\delta s}$ als eine auf die Aenderung des Raumes bezogene geometrische Kraft, welche die Aenderung des Druckes nach der Uebergangsrichtung zu bewirken strebt (Buch III, §. 39) und die gleiche Richtung hat, betrachtet und durch Π ersetzt werden kann, daß $\frac{d\,.\,q\,v^2}{d\,s} = 2\,T$ das Maß einer geometrischen Kraft ist, welche im Sinne der Bewegung wirkend, die Aenderung der geometrischen lebendigen Kraft des Flüssigkeitstheilchens $x\,y\,z$ zu erzeugen vermag, daß $q\,v^2\varkappa$ dem geometrischen dynamischen Druck N desselben Flüssigkeitstheilchens gleich und entgegengesetzt ist, so hat man auch die Gleichung:

$$\Pi + T\cos\omega_1 - N\cos\omega_2 - q\,R\cos\chi = 0;$$

und diese spricht nun aus, daß die Summe der Projectionen auf jede beliebige Uebergangsrichtung der vier homogenen, auf die Aenderung des Volumens oder auf die Volumeneinheit bezogenen geometrischen Kräfte Π, T, —N und —q R Null ist, daß also insbesondere die Kraft Π, deren Richtung immer mit der Uebergangsrichtung zusammen-

fällt, für jede solche Richtung durch die in diese Richtung fallende Componente der nach dieser Richtung und senkrecht dazu zerlegten Resultirenden der Kräfte q R, N und — T gemessen wird, daß sie also allgemein durch

$$\Pi = S \cos \vartheta$$

dargestellt werden kann, wenn S die zuletzt genannte Resultirende und ϑ den Winkel bezeichnet, welchen ihre Richtung mit einer beliebigen Uebergangsrichtung bildet, daß demnach die Kraft Π für jede andere Uebergangsrichtung eine andere Größe hat, daß sie für diejenige Uebergangsrichtung, welche mit der Richtung dieser Resultirenden zusammenfällt einen größten Werth erhält und für jede dazu senkrechte Null ist.

Für die zusammendrückbaren Flüssigkeiten hat man die Beziehung (62[a]) beizuziehen; diese kann aber immer die Form:

$$q = \mathbf{q} f\left(\frac{P}{\mathbf{P}}\right)$$

erhalten, wenn man mit $\mathbf{P}$ wie früher einen bestimmten Normaldruck bezeichnet und mit $\mathbf{q}$ die diesem Normaldruck entsprechende Dichte der Flüssigkeit in dem Punkte x y z und am Ende der Zeit t. Diese Dichte $\mathbf{q}$ ist dann eine nur von diesen Veränderlichen abhängige Function, wie die Dichte q einer nicht homogenen unzusammendrückbaren Flüssigkeit, und man hat daher wie bei diesen

$$\frac{d \cdot \mathbf{q}}{d s} = 0 \; , \quad \mathbf{q} \frac{d \cdot v^2}{d s} = \frac{d \cdot \mathbf{q} v^2}{d s} .$$

Macht man dann $\frac{1}{f\left(\frac{P}{\mathbf{P}}\right)} = F\left(\frac{P}{\mathbf{P}}\right)$, so wird die Gleichung (66)

$$67^b.)\quad F'\left(\frac{P}{\mathbf{P}}\right) \frac{\delta P}{\delta s_{\prime}} + \frac{1}{2} \frac{d \cdot \mathbf{q} v^2}{d s} \cos \omega_1 + \mathbf{q} v^2 \varkappa \cos \omega_2 = \mathbf{q} R \frac{\delta r}{\delta s_{\prime}} ,$$

und wenn man nun darin

$$F'\left(\frac{P}{\mathbf{P}}\right) \frac{\delta P}{\delta s} = \mathbf{P} \frac{\delta \cdot F\left(\frac{P}{\mathbf{P}}\right)}{\delta s}$$

durch Π', die geometrischen Kräfte $\frac{d \cdot \mathbf{q} v^2}{d s}$ und $\mathbf{q} v^2 \varkappa$ durch 2 T

und $-N'$, und die Resultirende der Kräfte $-T'$, N' und qR durch S' ersetzt, so hat man

$$\Pi' + T' \cos\omega_1 - N' \cos\omega_2 - qR\frac{\partial r}{\partial s} = 0 \quad ,$$

$$\Pi' = S' \cos\vartheta \quad ,$$

also für die Kräfte Π', T', N', qR, S' dieselben formellen Beziehungen, wie für die Kräfte Π, T, N, qR und S bei einer nicht zusammendrückbaren Flüssigkeit, und es folgt daraus dieselbe Bedeutung und derselbe Schluß wie dort. Ein wesentlicher Unterschied besteht aber einerseits in den Functionen Π und Π', von denen die erstere das unmittelbare Aenderungsgesetz des Druckes für die betreffende Uebergangsrichtung darstellt, während die zweite das Aenderungsgesetz einer Function von P ist, und darin, daß sich die Kräfte T', N', qR nicht auf den wirklichen Zustand des Flüssigkeitstheilchens xyz, sondern auf einen hypothetischen, unter dem Normaldruck P stattfindenden beziehen.

§. 34.

Aus den Gleichungen (67^a) und (67^b) lassen sich für bestimmte Uebergangsrichtungen mehrere beachtungswerthe Ergebnisse ziehen, von denen zwar nur zwei allgemein anwendbar sind, welche aber doch wichtige Aufschlüsse über den geometrischen Druck in einem beliebigen Punkte einer Flüssigkeit während der Bewegung derselben geben, und in gewissen Fällen anwendbar werden.

1) Gehen wir nämlich zuerst in der Bahn eines Flüssigkeitstheilchens fort, so wird $\frac{\partial P}{\partial s_{,}} = \frac{dP}{ds}$, $\frac{\partial x}{\partial s_{,}} = \frac{dx}{ds}$, u. s. f.

$$\frac{\partial x}{\partial s_{,}}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial y}{\partial s_{,}}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial z}{\partial s_{,}}\frac{dz}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

oder kurz, da alsdann die Uebergangsrichtung mit der Richtung der Bewegung oder der Kraft T zusammenfällt, $\omega_1 = 0$, $\cos\omega_1 = 1$; es muß folglich $\cos\omega_2 = \frac{\partial x}{\partial s_{,}}\cos\lambda + \frac{\partial y}{\partial s_{,}}\cos\mu + \frac{\partial z}{\partial s_{,}}\cos\nu$ Null werden, und die Gleichung (67^a) wird einfach

$$\frac{dP}{ds} + \frac{1}{2}\,\frac{d\,.\,qv^2}{ds} = q\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right) = qR\frac{dr}{ds} \;.$$

Diese Gleichung erscheint unter integrirbarer Form, wenn die rechte Seite ein vollständiges Aenderungsgesetz einer Function der drei Veränderlichen x, y, z ist, und gibt dann durch ihr Integral:

$$68^a.) \quad \Delta P + \frac{1}{2} \Delta . q v^2 = \int ds . q R \frac{dr}{ds}$$

die Beziehung zwischen der Aenderung des Druckes in der Richtung der Bewegung, der Aenderung der lebendigen Kraft und der Arbeit der äußern Kraft für zwei Punkte einer nicht zusammendrückbaren Flüssigkeit.

Lassen wir dann für die zusammendrückbaren Flüssigkeiten allgemein das Mariotte'sche Gesetz unter der Form:

$$q = \mathbf{q} \frac{P}{\mathbf{P}}$$

gelten, so wird $F'\left(\frac{P}{\mathbf{P}}\right) = \frac{\mathbf{P}}{P}$ und die Gleichung (67ᵇ) geht unter derselben Voraussetzung wie vorher in die Gleichung:

$$\frac{\mathbf{P}}{P} \frac{dP}{ds} + \frac{1}{2} \frac{d . \mathbf{q} v^2}{ds} = \mathbf{q} \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) = \mathbf{q} R \frac{dr}{ds}$$

über, deren unbestimmtes Integral:

$$68^b.) \quad \mathbf{P} \Delta . \log n\, P + \frac{1}{2} \Delta . \mathbf{q} v^2 = \int ds . \mathbf{q} R \frac{dr}{ds}$$

die entsprechende Beziehung für die Gase darstellt.

2) Gehen wir dagegen senkrecht zur Richtung der Bewegung fort und zwar in der Richtung der Verlängerung des Krümmungshalbmessers, so wird $\cos \omega_1 = 0$, $\cos \omega_2 = -1$, und wenn wir für die entsprechende Richtung $\frac{\delta x}{\delta s_t}$ durch $\frac{\delta' x}{\delta' s}$ ersetzen, so daß man hat

$$\frac{\delta' x}{\delta' s} \cos \lambda + \frac{\delta' y}{\delta' s} \cos \mu + \frac{\delta' z}{\delta' s} \cos \nu = -1,$$

so nehmen die Gleichungen (63) die Form an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta P}{\delta s} &= q R \frac{\delta r}{\delta s} + q v^2 \varkappa \quad, \\ \frac{\mathbf{P}}{P} \frac{\delta P}{\delta s} &= \mathbf{q} R \frac{\delta r}{\delta s} + \mathbf{q} v^2 \varkappa \quad; \end{aligned}\right\} \quad (69.$$

sie sind zwar so nicht mehr allgemein integrirbar, und setzen dazu überhaupt voraus, daß $\mathbf{q} v^2 \varkappa$ in Function von s ausgedrückt werden könne, sie zeigen aber die Aenderung des Druckes in der Richtung der Hauptnormalen der Bahn eines Flüssigkeitstheilchens durch die Arbeit der äußern Kraft und den dynamischen Druck des flüssigen Punktes, und können unter einfachen Voraussetzungen Anwendung finden.

3) Geht man ferner von einem Punkt x y z aus senkrecht zur Krümmungsebene der Bahn fort, welche dieser Punkt beschreibt, so ist sowohl $\cos \omega_1$ als $\cos \omega_2$ gleich Null, und die Gleichungen (67) geben, wie in dem Falle, wo v für alle Punkte Null, also inneres Gleichgewicht vorhanden ist,

$$\Delta P = \int \delta s \,.\, q R \frac{\delta r}{\delta s} \quad, \qquad \mathbf{P} \Delta \,.\, logn\, P = \int \delta s \,.\, \mathbf{q} R \frac{\delta r}{\delta s} \quad, \quad (70.$$

also in der That dieselben Beziehungen, wie die, welche in der ersten Abtheilung des vorhergehenden Abschnittes in etwas anderer Form abgeleitet wurden. Senkrecht zur Krümmungsebene der Bahn eines Flüssigkeitstheilchens ändert sich also der Druck nur gemäß der Arbeit der äußern Kraft wie beim innern Gleichgewicht.

4) Liegt die Richtung der äußern Kraft q R oder $\mathbf{q}$ R selbst in der Krümmungsebene, so wird für den zu dieser Ebene normalen Uebergang $\frac{\delta r}{\delta s} = 0$., und man hat

$$\Delta P = 0 \qquad \text{oder} \qquad \mathbf{P} \Delta \,.\, logn\, P = 0 \quad;$$

für diese Uebergangsrichtung ist also in jenem Falle der Druck constant.

5) Es gibt aber auch für jede andere Richtung der äußern Kraft immer nicht nur eine Uebergangs-Richtung, für welche der Druck constant bleibt, sondern eine Ebene, welche die Eigenschaft besitzt, daß für jede in ihr liegende Uebergangsrichtung der Druck constant bleibt, nämlich die Ebene, welche zu der Richtung der Resultirenden S oder S′ normal ist. Die Gleichung dieser Ebene folgt aus den Gleichungen (67), wenn darin $\frac{\delta P}{\delta s} = 0$ gesetzt wird, in der Form:

$$71.)\qquad R\,\frac{\partial r}{\partial s} - v^2 \varkappa \cos\omega_2 - \frac{1}{2}\,\frac{d\,.\,v^2}{ds}\cos\omega_1 = 0\ ,$$

diese Ebene ist offenbar die Tangential-Ebene zu der augenblicklichen Niveaufläche, welche durch den Punkt x y z geht, und die vorhergehende Gleichung ist demnach die Differentialgleichung dieser Niveaufläche und zwar sowohl für eine unzusammendrückbare als für eine gasförmige Flüssigkeit.

Aus dem Vorhergehenden geht im Allgemeinen hervor, daß das Aenderungsgesetz des Druckes nach verschiedenen Richtungen hin sehr verschieden sein kann; es kann aber daraus noch nicht strenge geschlossen werden, daß auch der Druck selbst nach verschiedenen Richtungen hin verschieden ist. Wenn man aber beachtet, daß die linke Seite der Gleichungen:

$$\frac{\partial P}{\partial s} = q\,R\,\frac{\partial r}{\partial s} - q\,v^2 \varkappa \cos\omega_2 - \frac{1}{2}\,\frac{d\,.\,q\,v^2}{ds}\cos\omega_1\ ,$$

$$\mathbf{P}\,\frac{\partial\,.\,logn\,P}{\partial s} = \mathbf{q}\,R\,\frac{\partial r}{\partial s} - \mathbf{q}\,v^2 \varkappa \cos\omega_2 - \frac{1}{2}\,\frac{d\,.\,\mathbf{q}\,v^2}{ds}\cos\omega_1\ ,$$

für jeden Augenblick, also für ein unveränderliches t das vollständige Aenderungsgesetz einer Function der drei unabhängigen Veränderlichen x, y, z sein müßte, daß also allgemein die Gleichungen:

$$P - P_0 = F_1(x, y, z) - F_1(x_0, y_0, z_0)\ ,$$

oder

$$\mathbf{P}\ logn\,\frac{P}{P_0} = F_2(x, y, z) - F_2(x_0, y_0, z_0)\ ,$$

worin die Coordinaten x_0, y_0, z_0 irgend einem Punkte der augenblicklichen Niveaufläche angehören können, in welcher der Druck P_0 ist, stattfinden müßten, wenn der Druck nach jeder Richtung derselbe, also von der Uebergangs-Richtung unabhängig sein könnte, und wenn man erwägt, daß sowohl die Richtung der Bewegung, als insbesondere die Größe und Richtung der Krümmung durch äußere Umstände, namentlich durch die Form der Gefäße, in welchen die Flüssigkeit sich bewegt, bedingt werden kann, so wird man erkennen, daß die vorhergehenden Bedingungen wohl für eine unbegrenzte Flüssigkeit und in besondern Fällen auch für begrenzte Flüssigkeitsmassen befriedigt werden können,

und der Druck nach allen Richtungen hin gleich sein kann, wie bei einem im innern Gleichgewichtszustande sich befindenden flüssigen System, daß dieses aber nicht immer der Fall sein wird, daß vielmehr der geometrische Druck in irgend einem Punkt eines in fließender Bewegung begriffenen Systems im Allgemeinen nach verschiedenen Richtungen hin verschieden sein wird, und daß es namentlich der bei der gezwungenen Bewegung der einzelnen Flüssigkeitstheilchen auftretende dynamische Druck ist, von welchem diese Verschiedenheit des Druckes nach verschiedenen Richtungen hin herrührt. Es genügt übrigens offenbar ein einziger besonderer Fall, in welchem sich diese Verschiedenheit des Druckes direct nachweisen läßt, um die Möglichkeit einer solchen Verschiedenheit im Allgemeinen zu beweisen. Solche Beweise liefern aber alle Bewegungen zusammendrückbarer oder nicht zusammendrückbarer Flüssigkeiten, bei welchen sich eine sogenannte Reaction fühlbar macht; denn diese ist eben nichts anderes, als die Gesammtwirkung des aus der gezwungenen Bewegung der Flüssigkeit hervorgehenden dynamischen Druckes, welche sich indessen weder durch die Druckhöhe, noch durch die Geschwindigkeit der Bewegung der Flüssigkeit wahrnehmbar macht, da diese dieselben bleiben, ob die Flüssigkeit unter sonst gleichen Umständen durch eine gerade oder eine gekrümmte Röhre fließt.

§. 35.

Aus den vorhergehenden Erörterungen geht hervor, daß die Gleichungen (68) ganz allgemein gültig und streng richtig sind, wenn für P der Druck in der Richtung der Bewegung des betreffenden Flüssigkeitstheilchens genommen wird, und daß es dazu keiner besondern Hypothese oder Voraussetzung über die Bewegung der Flüssigkeiten bedarf, wie man sie bisher unter dem Namen: Parallelismus der Schichten und Beharrungszustand der Flüssigkeit anwenden mußte, um für besondere Fälle, für die Bewegung schwerer homogener nicht zusammendrückbarer und nicht schwerer elastischer Flüssigkeiten Formeln abzuleiten, welche complicirter als die Gleichungen (68) und nicht einmal richtig sind, indem diese die Aenderung der Geschwindigkeit eines Flüssigkeitstheilchens nicht nur von dem Druck, sondern auch noch explicite von der Form des Gefäßes abhängig machen, während diese Abhängigkeit nur implicite in der gegenseitigen Beziehung zwischen der Geschwindigkeit und dem in der Richtung der Bewegung wirkenden Druck enthalten ist, oder Formeln, welche nur für einen bestimmten

Zustand der Flüssigkeit gültig sind *). Unsere Gleichungen (68) beruhen nur auf der nothwendigen Voraussetzung, daß die Aenderung des Drucks und der Geschwindigkeit zwischen den beiden Punkten der Bahn eines Flüssigkeitstheilchens, welche die Grenzen der Integrale oder Differenzen in jenen Gleichungen bilden, eine stetige sei, und es folgt daraus, daß für plötzlich eintretende Aenderungen die Untersuchung getheilt werden muß, und zwar so, daß die Punkte, an welchen solche plötzliche Aenderungen eintreten, die gemeinschaftlichen Grenzen für die betreffenden Theile der Bahn bilden.

Für die Anwendung der Gleichungen (68) ist ferner zu beachten, daß dieselben nur einen augenblicklichen Zustand der Flüssigkeit darstellen, oder vielmehr die Vergleichung des augenblicklichen Zustandes zweier Flüssigkeitstheilchen, deren Coordinaten, Geschwindigkeiten und Spannungen in der Richtung der Bewegung in diesem Augenblick x, y, z und x_0, y_0, z_0, v und v_0, P und P_0 sind und welche derselben Bahn angehören. Nimmt man dazu an, daß die Flüssigkeit homogen, also q oder $\mathfrak{q}$ constant und die Function:

$$X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}$$

das vollständige Aenderungsgesetz der Function:

$$F(x, y, z)$$

ist, so nehmen die Gleichungen (68) die entwickelte Form an:

$$72.) \begin{cases} P - P_0 + \frac{1}{2} q (v^2 - v_0^2) = q F(x, y, z) - q F(x_0, y_0, z_0), \\ \mathfrak{P} \, logn \frac{P}{P_0} + \frac{1}{2} \mathfrak{q} (v^2 - v_0^2) = \mathfrak{q} F(x, y, z) - \mathfrak{q} F(x_0, y_0, z_0). \end{cases}$$

Bezeichnet man dann die Coordinaten und die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitstheilchens, welches am Anfang der Zeit die Spannung P_0 erleidet und in der Bahn des Flüssigkeitstheilchens xyz liegt, mit $x_0^{(0)}$, $y_0^{(0)}$, $z_0^{(0)}$, $v_0^{(0)}$, und die Geschwindigkeit und Spannung des letztern selbst am Anfange der Zeit mit $v^{(0)}$, $P^{(0)}$, so hat man auch

*) Man vergleiche insbesondere *Duhamel*, Cours de mécanique, II. §§. 177—182, und beachte die zweifach fehlerhafte Anwendung des d'Alembert'schen Princips und die einseitigen Folgerungen aus der Gleichung (a) in §. 181.

$$P^{(0)} - P_0 + \frac{1}{2} q\left(v^{(0)2} - v_0^{(0)2}\right) = qF(x, y, z) - qF\left(x_0^{(0)}, y_0^{(0)}, z_0^{(0)}\right),$$

$$\mathbf{P} \log n \frac{P^{(0)}}{P_0} + \frac{1}{2}\mathbf{q}\left(v^{(0)2} - v_0^{(0)2}\right) = \mathbf{q}F(x, y, z) - \mathbf{q}F\left(x_0^{(0)}, y_0^{(0)}, z_0^{(0)}\right),$$

und diese Gleichungen mit den Gleichungen (72) verbunden, geben für die in der Zeit t in dem Punkte x y z vor sich gehenden Aenderungen die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} P - P^{(0)} + \frac{1}{2} q\left(v^2 - v^{(0)2}\right) - \frac{1}{2} q\left(v_0^2 - v_0^{(0)2}\right) \\ = qF(x_0, y_0, z_0) - qF\left(x_0^{(0)}, y_0^{(0)}, z_0^{(0)}\right) \\ \mathbf{P} \log n \frac{P}{P^{(0)}} + \frac{1}{2}\mathbf{q}\left(v^2 - v^{(0)2}\right) - \frac{1}{2}\mathbf{q}\left(v_0^2 - v_0^{(0)2}\right) \\ = \mathbf{q}F(x_0, y_0, z_0) - \mathbf{q}F\left(x_0^{(0)}, y_0^{(0)}, z_0^{(0)}\right). \end{aligned}\right\} \quad (73.$$

Alle diese Beziehungen, die wir bisher abgeleitet haben, geben aber keine vollständige Auflösung unserer Aufgabe; denn sie enthalten immer die beiden Unbekannten P und v und setzen im Grunde voraus, daß die Gesetze der Bewegung der einzelnen Flüssigkeitstheilchen bekannt und nur der Druck oder die Aenderung des Druckes in der Richtung der Bewegung zu suchen sei. Es müßten dazu noch die Gleichungen (62) und (63) zu Hülfe genommen werden; es ist aber bis jetzt der Analysis noch nicht gelungen, von diesen eine nutzbare Anwendung zu machen, selbst nicht für die Bewegung homogener Flüssigkeiten. Die Gleichung (63^b), nämlich

$$\frac{\delta u_x}{\delta x} + \frac{\delta u_y}{\delta y} + \frac{\delta u_z}{\delta z} = 0,$$

welche die Unzusammendrückbarkeit bedingt, führt nur zu der Folgerung, daß die Geschwindigkeitscomponenten u_x, u_y, u_z für eine nicht zusammendrückbare Flüssigkeit die allgemeine Form:

$$\left.\begin{aligned} u_x = \frac{\delta f_3}{\delta y} - \frac{\delta f_2}{\delta z}, \quad u_y = \frac{\delta f_1}{\delta z} - \frac{\delta f_3}{\delta x}, \\ u_z = \frac{\delta f_2}{\delta x} - \frac{\delta f_1}{\delta y} \end{aligned}\right\}$$

haben müssen, wenn f_1, f_2, f_3 irgend drei Functionen von x, y, z und t bezeichnen, welche auch dem anfänglichen Zustande des Flüssigkeitstheilchens $x_0\, y_0\, z_0$ genügen, und die Gleichung (62ᵃ) kann mittels des Gesetzes:

$$q = q\,\frac{P}{P}$$

für homogene oder vollständig gemengte Gase von constanter Temperatur auf die Form:

$$\frac{dP}{dt} + \frac{\partial . P u_x}{\partial x} + \frac{\partial . P u_y}{\partial y} + \frac{\partial . P u_z}{\partial z} = 0$$

gebracht werden; damit ist aber auch Alles erschöpft, was mit den genannten Gleichungen zu erreichen ist.

Wir sind demnach nothwendig darauf angewiesen, diese Gleichungen durch andere, wahrscheinliche zu ersetzen, welche uns durch die Beobachtung gegeben werden, und unsere rationellen Untersuchungen über die fließende Bewegung der Flüssigkeiten auf solche Fälle zu beschränken, in welchen entweder die Geschwindigkeit oder der Druck in der Richtung der Bewegung bekannt, also nur die andere dieser beiden Unbekannten zu suchen ist.

§. 36.

Betrachten wir zuerst den einfachsten Fall der eben erwähnten Art, indem wir annehmen, daß eine schwere, homogene, nicht zusammendrückbare Flüssigkeit aus einem Gefäße ausfließe, dessen Wand als eine durch die Umdrehung einer stetigen Curve ACE, Fig. 15 um eine verticale Achse erzeugte Umdrehungsfläche betrachtet werden kann; dieses Gefäß werde fortwährend bis zu demselben Kreise AB durch einen entsprechenden Zufluß voll erhalten, während die darin enthaltene Flüssigkeit durch die freie Oeffnung EF ausfließt, welche wir im Allgemeinen von einem kleineren Durchmesser als die Spiegelfläche AB voraussetzen wollen; endlich habe die erzeugende Curve ACE eine solche Gestalt, daß die Tangenten in A und E parallel zur Umdrehungsachse OZ seien. Unter diesen Voraussetzungen ist es sehr wahrscheinlich, daß alle Punkte der Spiegelfläche AB vertikal gerichtete Geschwindigkeiten haben; nehmen wir daher die vertikale Umdrehungsachse OZ als z-Achse an, so haben wir in der Spiegelfläche

$$\frac{dz}{ds} = 1 \quad , \quad \frac{dx}{ds} = \frac{dy}{ds} = 0 \quad , \quad \cos\omega_1 = \frac{\partial z}{\partial s_{,}} \quad , \quad R = g \; ,$$

$$R\,\frac{\partial r}{\partial s_{,}} = g\,\frac{\partial z}{\partial s_{,}} \; ;$$

es muß dann ferner zugelassen werden, daß die Krümmungsrichtungen aller Punkte der Spiegelfläche horizontal gerichtet sind und durch die Achse gehen; daraus folgt in den Gleichungen (65)

$$\cos\nu = 0 \quad , \quad \cos\mu = \sin\lambda \quad , \quad \tang\lambda = \frac{-y}{-x} \; ,$$

also auch, wenn $x^2 + y^2 = r'^2$ gesetzt wird,

$$x = -\,r' \cos\lambda \qquad , \qquad y = -\,r' \sin\lambda$$

$$\frac{\partial x}{\partial s_{,}} = -\frac{\partial r'}{\partial s_{,}}\cos\lambda + r'\sin\lambda\,\frac{\partial\lambda}{\partial s_{,}} \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial s_{,}} = -\frac{\partial r'}{\partial s_{,}}\sin\lambda - r'\cos\lambda\,\frac{\partial\lambda}{\partial s_{,}} \; ,$$

und

$$\cos\omega_2 = \frac{\partial x}{\partial s_{,}}\cos\lambda + \frac{\partial y}{\partial s_{,}}\sin\lambda = -\frac{\partial r'}{\partial s_{,}} \; ,$$

und die Gleichung (71) wird damit

$$\left(g - \frac{1}{2}\,\frac{d\,.\,v^2}{d\,s}\right)\frac{\partial z}{\partial s_{,}} + v^2\varkappa\,\frac{\partial r'}{\partial s_{,}} = 0 \; .$$

Endlich kann angenommen werden, daß die Geschwindigkeit v und das Aenderungsgesetz $\frac{d\,.\,v^2}{d\,s}$ für alle Flüssigkeitstheilchen der Spiegelfläche nahezu constant sind, daß die Krümmungen der von den einzelnen Flüssigkeitstheilchen beschriebenen Bahnen a c e um so geringer werden, je näher die Bahn der Achse liegt, und daß das in der Achse liegende Theilchen sich vertical abwärts bewegt, daß also $\varkappa$ eine Function von r' ist, welche mit r' von Null an so wächst, daß sie für $r' = \overline{OA} = a$ den dem Punkte A entsprechenden Werth annimmt. Integrirt man demnach die vorstehende Gleichung zwischen 0 und r', so kann man ihr die Form geben:

$$\left(g - \frac{1}{2}\,\frac{d\,.\,v^2}{d\,s}\right)(z - z_0) + v^2\left[F(r') - F(0)\right] = 0 \quad ,$$

worin auch $F(r')$ eine mit r' wachsende Function vorstellt, so daß $F(r') - F(0)$ zwischen $r' = 0$ und $r' = a$ immer positiv ist, und worin der Werth z_0 von z dem Werthe $r' = 0$, also dem Punkte in der Achse entspricht. Die letzte Gleichung ist nun aber die Gleichung der Spiegelfläche und zeigt mit der Beachtung, daß für diese der Factor $g - \frac{1}{2} \frac{d.v^2}{ds}$ immer > 0 sein muß, wenn die Flüssigkeit nicht frei durch das Gefäß hindurchfallen kann, und wenn sie demgemäß unter die Form:

$$z = z_0 - \frac{v^2 [F(r') - F(0)]}{g - \frac{1}{2} \frac{d.v^2}{ds}}$$

gebracht wird, daß die Spiegelfläche im Allgemeinen keine Ebene sein kann, sondern in der Achse des Gefäßes vertieft, also concav oder trichterförmig ist, daß sie aber in den gewöhnlichen Fällen von einer Ebene wenig verschieden sein wird, weil in diesen Fällen die Factoren v^2 und $F(r') - F(0)$ meistens sehr klein sind, und der Nenner wenig kleiner als g ist *). Eine genaue Ebene wird aber die Spiegelfläche nur dann sein, wenn v für alle Punkte derselben constant und $\varkappa = 0$ ist, wenn sich also alle Flüssigkeitstheilchen derselben mit gleicher Geschwindigkeit in Curven bewegen, welche an der Spiegelfläche mit einer Geraden eine Berührung zweiter Ordnung haben, und dieß wird sehr nahe stattfinden, wenn das Gefäß an der Spiegelfläche cylindrisch ist, und diese nicht zu nahe über der Ausflußöffnung liegt, weil in diesem Falle die von der Achse entfernteren Flüssigkeitstheilchen viel stärker gekrümmte Bahnen beschreiben müssen, um zu der Ausflußöffnung zu gelangen, als die in der Nähe der Achse liegenden, und weil dann auch schon die Bewegung jener Flüssigkeitstheilchen nicht mehr vertical gerichtet sein wird.

Nach der bereits ausgesprochenen Voraussetzung, daß auch die Tan-

*) Bei den in der Natur vorkommenden schweren Flüssigkeiten, bei denen die Widerstände S gegen die Verschiebung nicht Null sind, wird die Differenz $z - z_0$ noch kleiner durch die Verzögerung, welche die Flüssigkeitstheilchen gegen die Gefäßwand hin erleiden, weil dann v selbst und $\frac{d.v^2}{ds}$ Functionen von r werden, welche abnehmen, wenn r wächst, also für $r = 0$ ihren größten, für $r = a$ ihren kleinsten Werth erhalten, wodurch offenbar der Einfluß der mit r wachsenden Krümmung wesentlich vermindert und selbst ganz aufgehoben werden kann.

gente in E zur Achse OZ parallel sei, ist es auch sehr wahrscheinlich, daß alle Flüssigkeitstheilchen in der Ausflußöffnung EF sich parallel zu dieser Achse bewegen und daher bei dieser Bewegung nur den Druck zu überwinden haben, welchen eine den untern Theil des Gefäßes umgebende gasförmige Flüssigkeit ausübt. Ein ähnlicher Druck kann auch auf die Spiegelfläche AB ausgeübt werden; beziehen wir daher die Gleichung (68^a), welche für unsern Fall die Form:

$$\Delta P + \frac{1}{2} \Delta \cdot q v^2 = g q \Delta z \tag{74}$$

annimmt, zunächst auf die Spiegelfläche und die Ausflußöffnung, indem wir den geometrischen Druck auf jene mit P_0, auf diese mit P_1 bezeichnen, und ebenso die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitstheilchens in jener mit v_0, in dieser mit v_1, so finden wir für diese Ausflußgeschwindigkeit v_1 den Ausdruck:

$$v_1^2 - v_0^2 = 2g(z_1 - z_0) - \frac{P_1 - P_0}{q} ; \tag{A}$$

in welchem z_1 die für alle austretenden Flüssigkeitstheilchen constante Entfernung der Ausflußöffnung von der beliebigen xy-Ebene bedeutet, die Entfernung z_0 eines Theilchens in der Spiegelfläche dagegen strenggenommen eine Function von r ist. Läßt man aber zu, daß die Spiegelfläche eben sei und nimmt diese selbst als xy-Ebene also $z_0 = 0$, setzt dann $z_1 = h$, und vernachlässigt den Unterschied von P_1 und P_0, wenn ein und dasselbe schwere Gas (z. B. die atmosphärische Luft) auf beide Oeffnungen drückt, so hat man einfach

$$v_1^2 - v_0^2 = 2gh , \tag{a}$$

und schließt daraus, daß unter diesen Voraussetzungen die Aenderung der Geschwindigkeit von der Spiegelfläche bis zur Ausflußöffnung dieselbe ist, als wenn jedes Flüssigkeitstheilchen einzeln frei oder auf einer beliebigen Curve oder Fläche von jener bis zu dieser herabgefallen wäre.

Diese Geschwindigkeit ist also allen Punkten der Ausflußöffnung gemeinschaftlich und bleibt auch unter der früheren Voraussetzung, daß das Gefäß immer bis zu demselben Parallelkreise gefüllt erhalten wird, in Bezug auf die Zeit constant; die Flüssigkeitstheilchen folgen sich ferner in stetiger Folge; bliebe also die Geschwindigkeit von der Austrittsöffnung an unverändert, so müßte die in einer Zeiteinheit ausge-

tretene Flüssigkeit einen Cylinder bilden, dessen Basis die Ausflußöffnung und dessen Höhe die Ausflußgeschwindigkeit v_1 wäre, dessen Rauminhalt V also durch das Product $O_1 v_1$ gemessen würde, wenn O_1 der Flächeninhalt der Ausflußöffnung ist. Wir erhalten demnach für die in der Zeiteinheit ausfließende Flüssigkeitsmenge dem Rauminhalte nach gemessen, die Beziehung:

$$\text{b.)} \qquad V = O_1 v_1 = O_1 \sqrt{v_0^2 + 2gh} \; .$$

Nach den bisherigen Annahmen hat man aber nothwendig auch

$$\text{c.)} \qquad O_0 v_0 = O_1 v_1 \; ,$$

wenn O_0 den Flächeninhalt der Spiegelfläche bezeichnet, da durch die Spiegelfläche in der Zeiteinheit gerade dieselbe Wassermenge gehen muß, wie durch die Ausflußöffnung; zieht man daraus den Werth von v_0 und führt ihn in die Gleichungen (a) und (b) ein, so folgen die Werthe von v_1 und V in der Form:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{O_1^2}{O_0^2}}} \; , \qquad V = O_1 \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{O_1^2}{O_0^2}}} \; ,$$

welche nur von der Druckhöhe h und der Größe der beiden Oeffnungen abhängig ist; diese Werthe haben aber nur so lange Geltung, als die Gleichung (c), d. h. so lange die Ausflußöffnung während des Ausfließens gefüllt bleibt, und dieß kann offenbar wieder nur dann stattfinden, wenn diese Oeffnung wesentlich kleiner ist, als die Spiegelfläche, weil die Geschwindigkeit v_1 nach Gleichung (a) jedenfalls größer sein muß als v_0 und weil ein Strahl für gleiche Flüssigkeitsmenge bei größerer Geschwindigkeit einen kleineren Querschnitt haben muß, wie denn auch die Gleichung (c) unmöglich wird, wenn nicht O_1 kleiner ist als O_0.

Was endlich die Geschwindigkeit und den gegenseitigen Druck der Flüssigkeitstheilchen im Innern des Gefäßes betrifft, so können diese Größen selbst in unserem einfachen Falle nicht mit einiger Zuverlässigkeit bestimmt werden. Gewöhnlich läßt man die Beziehung (c) für jeden horizontalen Querschnitt O des Gefäßes gelten, um durch diese Beziehung die nicht anwendbare Gleichung (63^b) doch einigermaßen zu ersetzen, nimmt die daraus sich ergebende Geschwindigkeit v, nämlich

$$\text{d.)} \qquad v = v_1 \frac{O_1}{O}$$

als die gemeinschaftliche Geschwindigkeit aller Flüssigkeitstheilchen eines solchen Querschnittes an, und bestimmt darnach den sogenannten hydraulischen Druck P, mittels der Gleichung (72) in der Form:

$$P = P_0 + g q z - \frac{1}{2} q (v^2 - v_0^2) \quad , \qquad (e.$$

oder wenn für v und v_0 ihre aus (c) und (d) sich ergebenden Werthe eingeführt werden, in der Form:

$$P = P_0 + g q z - \frac{1}{2} q v_1^2 \left(\frac{O_1^2}{O^2} - \frac{O_1^2}{O_0^2}\right) \quad . \qquad (f.$$

Aber abgesehen davon, daß die Geschwindigkeiten der Flüssigkeitstheilchen in einem Querschnitt CD, Fig. 15, nicht alle gleich und parallel gerichtet sein können, daß also unter der Geschwindigkeit v in Gleichung (d) nur die als gleich vorausgesetzten verticalen Componenten der eigentlichen Geschwindigkeit zu verstehen wären, stellt der durch die Gleichungen (e) und (f) (von denen die erstere übrigens streng richtig ist, wenn unter v die wahre Geschwindigkeit und unter z der verticale Abstand eines Flüssigkeitstheilchens von dem entsprechenden Punkte der Spiegelfläche verstanden wird) gegebene Werth von P nur die Größe des Druckes in der Richtung der Bewegung vor, und ist daher noch lange nicht genügend, um den Druck nach jeder Richtung hin darzustellen, namentlich nicht, um den zur Bewegung senkrechten rein dynamischen Druck auszudrücken, (welcher nur durch die erste der Gleichungen (69) gefunden werden könnte, wenn v und x in Function von r' und z bekannt wäre) folglich auch nicht genügend, um den Druck auf einen Theil der Gefäßwand zu berechnen.

Der Druck, welchen die Flüssigkeit auf das ganze Gefäß ausübt, kann indessen durch eine besondere Betrachtung gefunden werden, die aber erst bei dem nächsten allgemeineren Fall zur Anwendung kommen soll.

In besondern Fällen kann übrigens auch die Gleichung (f) Anwendung finden, nämlich dann, wenn die Geschwindigkeiten aller Flüssigkeitstheilchen eines Querschnittes als gleich, parallel und geradlinig angenommen werden können, wenn also für alle Punkte dieses Querschnittes x Null ist. Für solche Fälle gibt die Gleichung (f) den ganzen geometrischen Druck für einen solchen Querschnitt, und zeigt, unter die Form:

$$P - P_0 = g q z + \frac{1}{2} q v_1^2 \frac{O_1^2}{O_0^2} \left(1 - \frac{O_0^2}{O^2}\right)$$

gebracht, daß der Ueberschuß des Druckes über den äußern atmosphärischen oder von irgend einer gasförmigen Flüssigkeit herrührenden den hydrostatischen Druck: $g q z$ gleich ist, so oft man $O = O_0$ hat, daß er größer wird, als dieser, wenn $O > O_0$, wie in C D Fig. 16; daß er dagegen kleiner ist in C D Figg. 17 und 18, wo $O < O_0$, und daß er selbst negativ werden kann, wenn man hat

$$\frac{1}{2} v_1^2 \frac{O_1^2}{O_0^2} \left(\frac{O_0^2}{O^2} - 1\right) > g z .$$

Diese Ungleichheit gibt aber mit Einführung des Werthes:

$$\frac{1}{2} v_1^2 \frac{O_0^2 - O_1^2}{O_0^2} = g h ,$$

für O die Bedingung:

$$O < O_1 \sqrt{\frac{h}{z + (h - z)\frac{O_1^2}{O_0^2}}} ,$$

oder für einen sehr kleinen Werth des Verhältnisses $\frac{O_1^2}{O_0^2}$ die einfachere angenäherte:

$$O < O_1 \sqrt{\frac{h}{z}} .$$

In solchen Fällen erleidet dann die Gefäßwand in den betreffenden Querschnitten durch die umgebende gasförmige Flüssigkeit den größern Druck von außen nach innen, so daß diese Flüssigkeit in das Gefäß eintritt, wenn daselbst in der Gefäßwand eine Oeffnung angebracht wird.

§. 37.

Der möglichst einfache Fall, der im vorigen §. hinreichend ausführlich behandelt wurde, um einerseits eine klare Einsicht in das Mangelhafte unserer hydrodynamischen Formeln selbst für die einfachsten Voraussetzungen zu verschaffen, auf der andern Seite aber auch die angenäherte Richtigkeit derselben zu zeigen, dieser Fall bildet gleichsam die Grundform für den Ausfluß einer schweren Flüssigkeit aus einem unbewegten Gefäße, indem man auch unter andern ziemlich abweichenden

Voraussetzungen in Betreff der Form des Gefäßes als der Wahrheit sehr nahe zuläßt, daß der *Spiegel der Flüssigkeit eine horizontale Ebene ist, und daß alle Flüssigkeitstheilchen in dieser, wie in jeder andern horizontalen Schnittebene gleiche und parallel gerichtete Geschwindigkeiten haben*; in Betreff der Form der Ausflußöffnung werden wir jedoch zunächst immer die dem vorhergehenden Falle entsprechende Annahme beibehalten, daß diese Oeffnung nicht normal in die Wand des Gefäßes eingebrochen ist, sondern in einer kurzen Ausbiegung dieser Wand besteht und mit derselben eine stetig zusammenhängende durch einen ebenen Schnitt begrenzte Fläche bildet, daß die zu diesem ebenen Schnitte, der eigentlichen Ausflußöffnung, normalen Tangenten an jene Fläche parallel sind, und daß demgemäß angenommen werden darf, daß alle Flüssigkeitstheilchen in dieser Oeffnung parallele Geschwindigkeiten besitzen.

Nehmen wir nach diesem zunächst den Fall, daß eine schwere tropfbare Flüssigkeit aus einer solchen, aber nun gegen die horizontale Spiegelfläche unter einem Winkel ν geneigten Oeffnung EF Fig. 19 ausfließe, und daß die Spiegelfläche AB wie im vorhergehenden Falle durch entsprechenden Zufluß auf constanter Höhe erhalten werde. Wir können dann nach dem Vorhergehenden diese Spiegelfläche als Ebene der xy nehmen, und die xz-Ebene senkrecht zur Ausflußöffnung legen, so daß die y-Achse parallel zu dem Durchschnitt der Ebene der Ausflußöffnung mit der Spiegelfläche wird. Die für jede schwere tropfbare Flüssigkeit unter allen Voraussetzungen geltende Gleichung (74) gibt dann wieder auf Spiegelfläche und Ausflußöffnung bezogen, die Gleichung:

$$P_1 - P_0 + \frac{1}{2} q (v_1^2 - v_0^2) = g q z , \qquad \text{(gi}$$

worin nun aber z für die verschiedenen Horizontalebenen, welche durch die Ausflußöffnung gelegt werden können, verschiedene Werthe erhalten muß, also auch v_1 veränderlich ist. Vernachlässigt man dann den Unterschied zwischen P_1 und P_0, wenn das ganze Gefäß von demselben Gase umgeben ist, so hat man die für verschiedene Punkte der Ausflußöffnung veränderliche Ausflußgeschwindigkeit:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2 g z} ,$$

welche aber noch für jeden Punkt in Bezug auf die Zeit constant bleibt.

Für eine durchaus constante Ausflußgeschwindigkeit hat man aber gemäß der Gleichung (b) des vorhergehenden §. die Beziehungen:

$$\Delta V = v_1 \Delta O_1 \quad \text{und} \quad \frac{\Delta_y \Delta_z V}{\Delta y \, \Delta z} = v_1 \frac{\Delta_y \Delta_z O_1}{\Delta y \, \Delta z}$$

zwischen der Aenderung der in der Zeiteinheit ausfließenden Flüssigkeitsmenge V und der Aenderung der Ausflußöffnung; für eine mit der Aenderung der Ausflußöffnung veränderliche Geschwindigkeit hat man daher

$$\text{h.)} \qquad \frac{d^2 V}{dy \, dz} = v_1 \frac{d^2 O_1}{dy \, dz} = \frac{1}{\sin \nu} \cdot v_1 \quad ,$$

und zieht daraus für V den Werth:

$$V = \int_{z_0}^{z_1} dz \int_{y_0}^{y_1} dy \cdot \frac{v_1}{\sin \nu} = \frac{1}{\sin \nu} \int_{z_0}^{z_1} dz \int_{y_0}^{y_1} dy \cdot \sqrt{v_0^2 + 2gz} \quad ,$$

welcher auch die Form:

$$V = \frac{1}{\sin \nu} \int_{z_0}^{z_1} dz \cdot (y_1 - y_0) \sqrt{v_0^2 + 2gz}$$

annimmt und voraussetzt, daß die auf die yz-Ebene projicirte Begrenzung der Ausflußöffnung durch eine Gleichung von der Form: $f(y, z) = 0$, aus welcher sich die beiden Werthe: $y_1 = f_1(z)$ und $y_0 = f_0(z)$ ergeben, oder durch zwei Gleichungen von dieser Form bestimmt sei, und daß z_1 und z_0 die Abstände der tiefsten und höchsten horizontalen Tangente an der Begrenzungscurve oder ihrer Projection in der yz-Ebene bedeuten.

Für die Anwendung dürfte es indessen nothwendig sein, dem Werthe von V eine zweckmäßigere Form zu geben, da für einen sehr kleinen Werth von ν der Factor $\frac{1}{\sin \nu}$ sehr groß wird, während das Integral einen sehr kleinen Werth annimmt, und für $\nu = 0$, V die Form: $0 \cdot \infty$ erhält. Man umgeht diese unzweckmäßige Form, wenn man die Punkte der Ausflußöffnung auf ein zweiachsiges Coordinatensystem der $\eta \zeta$ bezieht, das in der Ebene dieser Oeffnung liegt, und dessen η-Achse zur y-Achse parallel und in einem bekannten Abstande h von der Spiegelfläche gezogen ist. Für diese Coordinaten hat man einmal

$$z = h + \zeta \sin \nu$$

und dann

$$\frac{d^2 V}{d\eta\, d\zeta} = \frac{d^2 O_1}{d\eta\, d\zeta} v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2g(h + \zeta \sin\nu)}\ ,$$

da für die ebene Ausflußöffnung $\frac{d^2 O_1}{d\eta\, d\zeta} = 1$ ist, und daraus folgt wieder

$$V = \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} d\zeta \int_{\eta_0}^{\eta_1} d\eta \,.\, v_1 = \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} d\zeta \,.\, (\eta_1 - \eta_0) \sqrt{v_0^2 + 2g(h + \zeta \sin\nu)}\ , \quad \text{(i.}$$

worin nun η_1 und η_0 in Function von ζ auszudrücken, und ζ_1 und ζ_0 die Abstände der zur y=Achse parallelen Begrenzungstangenten von der η=Achse sind. Wird hier die Ausflußöffnung horizontal, so hat man $\sin\nu = 0$ und daher

$$V = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} d\zeta\ (\eta_1 - \eta_0) = v_1\, O_1$$

wie im vorhergehenden §.; für eine verticale Oeffnung dagegen ist $\sin\nu = 1$, und $\eta = y$, $h + \zeta = z$,

$$V = \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} d\zeta\, (\eta_1 - \eta_0) \sqrt{v_0^2 + 2g(h+\zeta)} = \int_{z_0}^{z_1} dz\, (y_1 - y_0) \sqrt{v_0^2 + 2gz}\ ,$$

wie es auch die Beziehung (h) gibt.

Wenn auf diese Weise der Werth von V für eine Ausflußöffnung von gegebener Gestalt, Größe und Lage bestimmt ist, so muß zuletzt noch die durch diese Elemente selbst bedingte Geschwindigkeit v_0 in der Spiegelfläche mittels der schon im vorigen §. angewandten Beziehung: $O_0\, v_0 = V$ eliminirt, und V daraus in Function der unmittelbar gegebenen Größen gezogen werden.

Dividirt man endlich diesen Werth von V durch den Flächeninhalt der Ausflußöffnung, so erhält man die mittlere Geschwindigkeit w_1 des ausfließenden Strahles, d. h. die constante Geschwindigkeit aller Flüssigkeitstheilchen einer gleichgroßen horizontalen Oeffnung, durch welche in der Zeiteinheit dieselbe Flüssigkeitsmenge V ausfließen kann, und es ist darnach leicht, mittels der Beziehung:

$$w_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gc} = \frac{V}{O_1}$$

den Abstand c jener horizontalen Oeffnung oder den Abstand derjenigen horizontalen Sehne der Ausflußöffnung von der Spiegelfläche zu bestimmen, in welcher jene mittlere Geschwindigkeit wirklich vorhanden ist.

§. 38.

Um einige Beispiele für die Anwendung der vorhergehenden Formeln zu geben, wollen wir zuerst eine rechteckige Ausflußöffnung annehmen, von welcher zwei Seiten horizontal seien, und deren horizontale Mittellinie den Abstand h von der freien Oberfläche der Flüssigkeit habe. Legt man dazu die xz-Ebene durch eine der nicht horizontalen Seiten, und bezeichnet die Länge dieser Seiten mit a, die der horizontalen Seiten mit b, so sind die Grenzen von η in der Gleichung (i), $\eta_0 = 0$, $\eta_1 = b$, die von ζ dagegen $\zeta_0 = -\frac{1}{2}a$, $\zeta_1 = +\frac{1}{2}a$, und damit ergibt sich nach (i)

$$V = b \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} d\zeta \cdot \sqrt{v_0^2 + 2g(h + \zeta \sin\nu)}$$

$$= \frac{b}{3g \sin\nu} \left(\sqrt{[v_0^2 + 2g(h + \tfrac{1}{2}a \sin\nu)]^3} - \sqrt{[v_0^2 + 2g(h - \tfrac{1}{2}a \sin\nu)]^3} \right).$$

Um aber aus diesem Ausdruck v_0^2 zu eliminiren, hätte man in Bezug auf v_0^2 oder V^2 eine Gleichung vom 4ten Grade aufzulösen, und wenn dieses geschehen ist, dann hat die Bestimmung von c keine besondere Schwierigkeit mehr.

Vernachlässigt man dagegen v_0 in dem Falle, wo die Ausflußöffnung ziemlich klein ist gegen die Spiegelfläche, so hat man einfacher

$$\text{k.)} \quad V = \frac{2}{3} \frac{b}{\sin\nu} \sqrt{2g} \left(\sqrt{(h + \tfrac{1}{2}a \sin\nu)^3} - \sqrt{(h - \tfrac{1}{2}a \sin\nu)^3} \right),$$

und die Bedingung:

$$O_1 \sqrt{2gc} = ab \sqrt{2gc} = V$$

gibt den Abstand c in der Form:

$$c = \frac{2}{9}\,h\,.\,\frac{1 + 3\,\frac{a^2 sin^2 \nu}{4h^2} - \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 sin^2 \nu}{4h^2}\right)^3}}{\frac{a^2 sin^2 \nu}{4h^2}}\,.$$

Im Allgemeinen ist aber immer $a\,sin\,\nu$ kleiner als $2h$, da es höchstens gleich $2h$ werden kann; man kann daher die Werthe von V und c in convergirenden Reihen ausdrücken, dazu den von V zunächst auf die Form:

$$V = \frac{2}{3}\,\frac{bh}{sin\,\nu}\,\sqrt{2gh}\left[\sqrt{\left(1+\frac{a\,sin\,\nu}{2h}\right)^3} - \sqrt{\left(1-\frac{a\,sin\,\nu}{2h}\right)^3}\right]$$

bringen und dann hier und in dem Werthe von c die Entwickelungen:

$$\sqrt{\left(1\pm\frac{a\,sin\,\nu}{2h}\right)^3} = 1 \pm \frac{3}{2}\left(\frac{a\,sin\,\nu}{2h}\right) + \frac{3.1}{2.4}\left(\frac{a\,sin\,\nu}{2h}\right)^2 \mp \frac{3.1.1}{2.4.6}\left(\frac{a\,sin\,\nu}{2h}\right)^3 + \frac{3.1.1.3}{2.4.6.8}\left(\frac{a\,sin\,\nu}{2h}\right)^4 \mp \text{etc.}\;,$$

$$\sqrt{\left(1-\frac{a^2 sin^2 \nu}{4h^2}\right)^3} = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{a\,sin\,\nu}{2h}\right)^2 + \frac{3.1}{2.4}\left(\frac{a\,sin\,\nu}{2h}\right)^4 + \frac{3.1.1}{2.4.6}\left(\frac{a\,sin\,\nu}{2h}\right)^6 + \text{etc.}$$

einführen, wodurch man die angenäherten Werthe findet:

$$\left.\begin{aligned} V &= ab\sqrt{2gh}\left[1 - \frac{1}{24}\left(\frac{a\,sin\,\nu}{2h}\right)^2 - \frac{1}{128}\left(\frac{a\,sin\,\nu}{2h}\right)^4 - \text{etc.}\right],\\ c &= h\left[1 - \frac{1}{12}\left(\frac{a\,sin\,\nu}{2h}\right)^2 - \frac{1}{72}\left(\frac{a\,sin\,\nu}{2h}\right)^4 - \text{etc.}\right]. \end{aligned}\right\}(1.$$

Wenn dagegen die Ausflußöffnung bis zum Spiegel der Flüssigkeit reicht, und $a\,sin\,\nu = 2h$ wird, so hat man aus den allgemeinen Werthen von V und c genau

$$V = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,ab\sqrt{2gh}\;,\quad c = \frac{8}{9}\,h\,.$$

Jede andere geradlinig begrenzte Oeffnung kann, wie auch die eben berechnete rechteckige in dieser oder in einer andern Lage, als die Summe oder Differenz oder als Differenz zweier Summen von rechtwinkligen Dreiecken betrachtet werden, von denen jedes eine horizontale Kathete hat, in denen aber die dieser Kathete gegenüberliegende Spitze bald abwärts, bald aufwärts gerichtet ist. Es genügt daher, um den Ausfluß durch irgend eine ebene geradlinig begrenzte Oeffnung berechnen zu können, den Werth von V für zwei solche rechtwinklige Dreiecke mit auf- und abwärts gerichteten Spitzen zu bestimmen.

Betrachten wir zuerst das Dreieck mit abwärts gerichteter Spitze, ABC, Fig. 20, nehmen diese Spitze A als Anfangspunkt der η und ζ, indem wir die η-Achse wieder horizontal legen und die positiven η immer gegen die Hypotenuse AC gerichtet sein lassen, und setzen AB = a, BC = b und den Abstand der Spitze A vom Spiegel der Flüssigkeit gleich h, so haben wir in dem Ausdruck (i) für η die Grenzen $\eta_0 = 0$, $\eta_1 = -\frac{b}{a}\zeta$ einzuführen, und finden demnach unter der Voraussetzung, daß v_0^2 vernachlässigt werden darf,

$$\text{m.)}\quad \begin{cases} V = \dfrac{b}{a}\displaystyle\int_0^{-a} d\zeta \,.\, \zeta\sqrt{2g\,(h+\zeta\sin\nu)} \\[2ex] = \dfrac{2b}{15a}\,\underset{-a}{\overset{0}{\Delta}}\,\dfrac{2h^2-h\zeta\sin\nu-3\zeta^2\sin^2\nu}{\sin^2\nu}\sqrt{2g(h+\zeta\sin\nu)} \\[2ex] = \dfrac{2b}{15a}\sqrt{2g}\,\dfrac{2h^2\sqrt{h}-(2h^2+ha\sin\nu-3a^2\sin^2\nu)\sqrt{h-a\sin\nu}}{\sin^2\nu} \\[2ex] = \dfrac{2abh^2}{15a^2\sin^2\nu}\sqrt{2gh}\left[2-\left(2+\dfrac{a\sin\nu}{h}-3\dfrac{a^2\sin^2\nu}{h^2}\right)\sqrt{1-\dfrac{a\sin\nu}{h}}\right]. \end{cases}$$

Diese letzte Form des Werthes von V entspricht wieder am besten dem Falle, wo $a\sin\nu$ ziemlich klein ist gegen h, und führt durch Entwickelung der Wurzelgröße: $\sqrt{1-\frac{a\sin\nu}{h}}$ auf den angenäherten Werth:

$$\text{n.)}\quad V = \frac{1}{2}\,ab\sqrt{2gh}\left(1-\frac{1}{3}\,\frac{a\sin\nu}{h}-\frac{1}{16}\,\frac{a^2\sin^2\nu}{h^2}-\text{etc.}\right).$$

Soll übrigens $h = a \sin\nu$ sein, die Spitze des Dreieckes also in der Spiegelfläche der Flüssigkeit liegen, so hat man aus demselben Werth auch unmittelbar

$$V = \frac{4}{15}\, a b \sqrt{2 g a \sin\nu} \quad . \qquad \text{(n}'.$$

Für das zweite unserer Dreiecke, nämlich dasjenige, dessen Spitze nach oben gerichtet ist, wie ADC Fig. 20, nehmen wir den Scheitel D des rechten Winkels als Anfang der η und ζ, und dessen Abstand vom Spiegel gleich h an; es wird dann die Gleichung der Hypotenuse AC

$$\eta = b + \frac{b}{a}\zeta \quad ,$$

und damit folgt

$$V = \int_{-a}^{0} d\zeta \left(b + \frac{b}{a}\zeta\right) \sqrt{2g(h + \zeta \sin\nu)}$$

$$= b\int_{-a}^{0} d\zeta \sqrt{2g(h+\zeta \sin\nu)} - \frac{b}{a}\int_{0}^{-a} d\zeta \,.\, \zeta \sqrt{2g(h+\zeta\sin\nu)} \quad ,$$

d. h. wir finden V als Differenz zwischen dem Ausfluß durch das Rechteck ABCD und dem durch das vorherberechnete Dreieck ABC. Die Ausflußmenge V_1 durch das Rechteck ergibt sich nun in der Form:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{2}{3}\, b \sqrt{2g}\, \frac{\sqrt{h^3} - \sqrt{(h - a\sin\nu)^3}}{\sin\nu} \\ &= \frac{2}{3}\, b h \sqrt{2gh}\, \frac{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{a\sin\nu}{h}\right)^3}}{\sin\nu} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(o.}$$

oder für kleine Werthe des Verhältnisses $\frac{a \sin\nu}{h}$ angenähert

$$V_1 = ab\sqrt{2gh}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{a\sin\nu}{h} - \frac{1}{24}\frac{a^2\sin^2\nu}{h^2} + \text{etc.}\right) .$$

Damit und mit dem Werthe (n) hat man dann

$$V = \frac{1}{2} ab \sqrt{2gh} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{a \sin\nu}{h} - \frac{1}{48} \frac{a^2 \sin^2\nu}{h^2} + \text{etc.}\right) ;$$

die allgemeinen Werthe (m) und (o) dagegen führen auf den Ausdruck:

p.)

$$\left\{ \begin{aligned} V &= \frac{2b}{15a} \sqrt{2g} \, \frac{(5ah \sin\nu - 2h^2)\sqrt{h} + 2(h - a\sin\nu)^2 \sqrt{h - a\sin\nu}}{\sin^2\nu} \\ &= \frac{2}{15} ab \sqrt{2gh} \, \frac{h^2}{a^2 \sin^2\nu} \left[\frac{5a\sin\nu}{h} - 2 + 2\left(1 - \frac{a\sin\nu}{h}\right)^2 \sqrt{1 - \frac{a\sin\nu}{h}} \right], \end{aligned} \right.$$

und dieser gibt für $h = a \sin\nu$ insbesondere den Werth:

$$V = \frac{2}{5} ab \sqrt{2ga \sin\nu} ,$$

welcher mit (n') verglichen zeigt, daß von der Flüssigkeitsmenge, die durch das bis zum Spiegel reichende Rechteck ABCD ausfließt, $\frac{2}{5}$ durch das Dreieck ABC und $\frac{3}{5}$ durch das Dreieck ACD ausfließen.

Für manche Fälle dürfte es endlich zweckmäßiger sein, den Anfang der ζ zu verlegen, namentlich im ersten Falle den Scheitel des rechten Winkels und im zweiten die Spitze C als Anfang, d. i. als denjenigen Punkt zu nehmen, dessen Abstand vom Spiegel $= h$ ist. Dazu hat man in (m) und in (p) $h + a \sin\nu$ für h zu setzen, und findet so für das Dreieck ABC

$$\text{q.)} \quad V = \frac{2b}{15a} \sqrt{2g} \, \frac{2(h + a\sin\nu)^2 \sqrt{h + a\sin\nu} - (2h^2 + 5ah\sin\nu)\sqrt{h}}{\sin^2\nu} ,$$

für das Dreieck ACD

$$\text{r.)} \quad V = \frac{2b}{15a} \sqrt{2g} \, \frac{2h^2\sqrt{h} - (2h^2 - ah\sin\nu - 3a^2\sin^2\nu)\sqrt{h + a\sin\nu}}{\sin^2\nu} ,$$

und man sieht leicht, daß der Werth (q) aus (p), der Werth (r) aus (m) durch die Substitution von $-a$ für $+a$ hervorgeht.

Addiren wir nun die doppelten Werthe (p) und (q), so erhalten wir die Ausflußmenge durch einen Rhombus, dessen eine Diagonale horizontal und gleich 2b, dessen andere Diagonale gleich 2a ist und

dessen Mittelpunkt den verticalen Abstand h vom Spiegel der Flüssigkeit hat, nämlich

$$V = \frac{8b}{15 a \sin^2 \nu} \sqrt{2gh} \left[(h + a \sin \nu)^2 \sqrt{1 + \frac{a \sin \nu}{h}} + (h - a \sin \nu)^2 \sqrt{1 - \frac{a \sin \nu}{h}} - 2h^2 \right].$$

Für ein Quadrat, dessen eine Diagonale horizontal ist, wird daher

$$V = \frac{8h^2}{15 \sin^2 \nu} \sqrt{2gh} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{a \sin \nu}{h}\right)^5} + \sqrt{\left(1 - \frac{a \sin \nu}{h}\right)^5} - 2 \right]$$

oder angenähert, wenn $h > a \sin \nu$ ist,

$$V = 2a^2 \sqrt{2gh} \left[1 - \frac{1}{48} \left(\frac{a \sin \nu}{h}\right)^2 - \frac{1}{348} \left(\frac{a \sin \nu}{h}\right)^4 - \text{etc.} \right];$$

man hat aber auch, wenn s die Seite dieses Quadrats ist, $s^2 = 2a^2$, und damit ergibt sich der Werth:

$$V = s^2 \sqrt{2gh} \left[1 - \frac{1}{24} \left(\frac{s \sin \nu}{2h}\right)^2 - \frac{1}{96} \left(\frac{s \sin \nu}{2h}\right)^4 - \text{etc.} \right]$$

welcher mit (1) verglichen zeigt, daß die Ausflußmenge durch ein Quadrat, dessen Mittelpunkt den Abstand h vom Spiegel und das eine Seite horizontal gerichtet hat, nur um $\frac{1}{384} \left(\frac{s \sin \nu}{2h}\right)^4 + \text{etc.}$ größer ist, als wenn man dasselbe Quadrat so um seinen Mittelpunkt dreht, daß eine Diagonale horizontal wird.

Untersuchen wir endlich noch den Ausfluß durch eine halbkreisförmige Oeffnung, deren Mittelpunkt den verticalen Abstand h vom Spiegel hat, und deren begrenzender Durchmesser 2a horizontal ist, so werden wir in dem allgemeinen Ausdruck (i) für V

$$\eta_1 = + \sqrt{a^2 - \zeta^2}, \qquad \eta_0 = - \sqrt{a^2 - \zeta^2}$$

setzen und für ζ die Grenzen a und 0 oder 0 und $-a$ nehmen, je nachdem die Oeffnung unter oder über jenem Durchmesser liegt. Wir

haben daher in beiden Fällen unter Vernachlässigung von v_0^2 das unbestimmte Integral:

$$\text{a.)} \qquad \Delta V = 2 \int d\zeta \, . \sqrt{a^2 - \zeta^2} \, . \sqrt{2g(h + \zeta \sin\nu)} \, ,$$

zu berechnen, welches im Allgemeinen nur durch eine Reihe dargestellt werden kann, indem man die Wurzelgröße $\left(1 + \frac{\zeta \sin\nu}{h}\right)^{\frac{1}{2}}$ entwickelt; nur in dem Falle, wo der Kreis die Spiegelfläche berührt, wo man also $h = a \sin\nu$ hat, läßt sich dasselbe in geschlossener Form ausdrücken. In diesem Falle hat man

$$\Delta V = 2 \int d\zeta \, . \sqrt{2g \sin\nu} \, . (a + \zeta) \sqrt{a - \zeta}$$

$$= -\frac{4}{15} \sqrt{2g \sin\nu} \, . \Delta \, . (7a + 3\zeta) \sqrt{(a - \zeta)^3} \, ,$$

und dieser Ausdruck gibt für den abwärts gerichteten Halbkreis

$$V_1 = \frac{28}{15} a^2 \sqrt{2g\, a \sin\nu} = \frac{56}{15\pi} \cdot \frac{1}{2} \pi a^2 \sqrt{2g\, a \sin\nu}$$

für den aufwärts gerichteten

$$V_2 = \frac{32\sqrt{2} - 28}{15} a^2 \sqrt{2g a \sin\nu} = \frac{8(8\sqrt{2} - 7)}{15\pi} \frac{1}{2} \pi a^2 \sqrt{2g a \sin\nu} \, ,$$

also für den ganzen, den Spiegel berührenden Kreis

$$V_3 = V_1 + V_2 = \frac{32\sqrt{2}}{15\pi} \, . \pi a^2 \sqrt{2g\, a \sin\nu} = 0{,}96 \, .. \, \pi a^2 \sqrt{2g\, a \sin\nu} \, ;$$

diese Ausflußmenge ist demnach nur um etwa 4 Prozent kleiner, als die durch eine gleich große horizontale Oeffnung in dem Abstande $a \sin\nu$ vom Spiegel der Flüssigkeit, und man findet leicht als Abstand c des Ortes der mittleren Geschwindigkeit vom Spiegel

$$c = \frac{2 \, . \, 32^2}{15^2 \pi^2} a \sin\nu = 0{,}92 \ldots a \sin\nu \, .$$

Die Ausführung des allgemeinen Integrals (s) für die Fälle, wo $h > a \sin \nu$ hat keine Schwierigkeit und soll dem Leser überlassen werden; man ersetzt dasselbe aber noch zweckmäßiger durch den auf Polar-Coordinaten bezogenen Werth. Dazu hat man, wenn r und ω die in der Ebene der Ausflußöffnung genommenen Coordinaten eines Punktes dieser Oeffnung sind,

$$\frac{d^2 V}{dr\, d\omega} = \frac{d^2 O_1}{dr\, d\omega} v_1 = r v_1 = r \sqrt{v_0^2 + 2gz} \;,$$

und wenn h den Abstand des Poles vom Spiegel bedeutet, und die ω von einer horizontalen Achse aus gemessen werden,

$$z = h + r \sin \omega \sin \nu$$

und erhält so mit Vernachlässigung von v_0^2 für den untern Halbkreis das bestimmte Integral:

$$V_1 = \int_0^{\pi} d\omega \int_0^{a} dr \,.\, r \sqrt{2g(h + r \sin \omega \sin \nu)} \;,$$

für den obern dagegen

$$V_2 = \int_{\pi}^{2\pi} d\omega \int_0^{a} dr . r \sqrt{2g(h + r \sin \omega \sin \nu)} = \int_0^{\pi} d\omega \int_0^{a} dr . r \sqrt{2g(h - r \sin \omega \sin \nu)} \,,$$

und für den ganzen Kreis

$$V_3 = V_1 + V_2 = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{a} dr \,.\, r \sqrt{2g(h + r \sin \omega \sin \nu)} \;.$$

Wir haben also für alle diese Fälle zunächst das Integral

$$\frac{dV}{d\omega} = \sqrt{2gh} \int_0^{a} dr \,.\, r \sqrt{1 + \frac{r \sin \omega \sin \nu}{h}}$$

$$= \sqrt{2gh} \int_0^{a} dr . r \left[1 + \frac{1}{2} r \frac{\sin \omega \sin \nu}{h} - \frac{1.1}{2.4} r^2 \left(\frac{\sin \omega \sin \nu}{h}\right)^2 + \text{etc.}\right]$$

und finden dafür, wenn zunächst $\frac{\sin\nu}{h} = \frac{1}{h'}$ gesetzt wird,

$$\frac{dV}{d\omega} = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{2gh}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{a\sin\omega}{h'} - \frac{1}{16}\frac{a^2\sin^2\omega}{h'^2} + \frac{1}{40}\frac{a^3\sin^3\omega}{h'^3} - \text{etc.}\right).$$

Die Berechnung von V beruht also auf der des bestimmten Integrals von $\sin^n\omega$ zwischen den oben angegebenen Grenzen von ω, und man wird leicht für ein gerades $n = 2\nu$

$$\int_0^\pi d\omega\,.\,\sin^{2\nu}\omega = \int_\pi^{2\pi} d\omega\,.\,\sin^{2\nu}\omega = \frac{1.3.5\ldots(2\nu-1)}{2.4.6\ldots\;2\nu}\,\pi$$

finden, für ein ungerades $n = 2\nu + 1$ dagegen

$$\int_0^\pi d\omega.\sin^{2\nu+1}\omega = \frac{2.4.6\ldots\;2\nu}{3.5.7\ldots(2\nu+1)}\int_0^\pi d\omega.\sin\omega = 2\,\frac{2.4.6\ldots\;2\nu}{3.5.7\ldots(2\nu+1)},$$

$$\int_\pi^{2\pi} d\omega.\sin^{2\nu+1}\omega = \frac{2.4.6\ldots\;2\nu}{3.5.7\ldots(2\nu+1)}\int_\pi^{2\pi} d\omega.\sin\omega = -2\,\frac{2.4.6\ldots\;2\nu}{3.5.7\ldots(2\nu+1)},$$

und damit ergeben sich die Werthe:

$$V_1 = \frac{1}{2}\pi a^2\sqrt{2gh}\left(1 - \frac{1}{32}\frac{a^2\sin^2\nu}{h^2} - \frac{5}{1024}\frac{a^4\sin^4\nu}{h^4} - \text{etc.}\right)$$

$$+ a^2\sqrt{2gh}\left(\frac{2}{9}\frac{a\sin\nu}{h} + \frac{1}{75}\frac{a^3\sin^3\nu}{h^3} + \text{etc.}\right),$$

$$V_2 = \frac{1}{2}\pi a^2\sqrt{2gh}\left(1 - \frac{1}{32}\frac{a^2\sin^2\nu}{h^2} - \frac{5}{1024}\frac{a^4\sin^4\nu}{h^4} - \text{etc.}\right)$$

$$- a^2\sqrt{2gh}\left(\frac{2}{9}\frac{a\sin\nu}{h} + \frac{1}{75}\frac{a^3\sin^3\nu}{h^3} + \text{etc.}\right),$$

und für den ganzen Kreis hat man einfacher

$$V_3 = \pi a^2\sqrt{2gh}\left(1 - \frac{1}{32}\frac{a^2\sin^2\nu}{h^2} - \frac{5}{1024}\frac{a^4\sin^4\nu}{h^4} - \text{etc.}\right),$$

sowohl als Summe der beiden vorhergehenden Werthe, als auch direct durch Integration zwischen 2π und 0.

Denselben Ausdruck gibt dann auch das Integral (x), wenn es von $-a$ bis $+a$ genommen wird, und dieses zeigt zugleich durch die entsprechenden Werthe von η, daß sich der obige Werth von V_3 für eine elliptische Oeffnung, deren eine Achse $= 2b$ horizontal und deren Mittelpunkt um h vom Spiegel entfernt ist, nur insofern ändert, als darin die Fläche der Ellipse πab statt der Kreisfläche πa^2 zu setzen ist.

§. 39.

Was nun den Druck im Innern des Gefäßes betrifft, so läßt sich dieser im gegenwärtigen Falle noch viel weniger für einzelne Punkte und Richtungen bestimmen, als im vorhergehenden, da hier die Bahnen der einzelnen Flüssigkeitstheilchen sowohl in ihren Richtungen als in ihren Krümmungen viel mehr unter sich abweichen und viel schwieriger zu muthmaßen sind, als dort, und da namentlich hier die Gleichung:

$$O\,v = O_0\,v_0 = O_1\,v_1$$

für einen beliebigen horizontalen Querschnitt des Gefäßes nur in sehr beschränkter Weise zulässig ist, nämlich nur noch für solche Querschnitte, welche hinreichend weit über der Ausflußöffnung liegen, also gar nicht mehr, wenn diese Oeffnung ganz oder nahe bis zum Spiegel der Flüssigkeit reicht. Der Druck auf das ganze Gefäß kann indessen durch folgende der Wahrheit sich nähernde Betrachtung gefunden werden, welche bei dem jetzigen Zustande der Hydrodynamik überall angewendet werden muß, wo es sich um eine Bestimmung des Druckes oder der Arbeit einer in fließender Bewegung begriffenen Flüssigkeit handelt.

Wie auch die Form des Gefäßes beschaffen sein mag, es kann in der Flüssigkeit immer eine Curve gedacht werden von solcher Beschaffenheit, daß die Geschwindigkeit in irgend einem Punkte derselben der Richtung nach mit dieser Curve zusammenfällt und zugleich die mittlere Geschwindigkeit ist für den zu dieser Curve normalen ebenen Schnitt des Gefäßes, und daß die in jeder Zeiteinheit durch diesen Schnitt gehende Flüssigkeit der in derselben Zeit durch die Ausflußöffnung austretenden Flüssigkeitsmenge gleich ist. Um das Vorhandensein einer solchen Curve in der Flüssigkeit zu beweisen, genügt es die Möglichkeit ihrer Bestimmung zu zeigen unter der Voraussetzung, daß uns die Bewegungsgesetze vollständig bekannt wären. Unter dieser Voraussetzung könnten aber für jeden Punkt $x\,y\,z$ der Flüssigkeit die Componenten

u_x, u_y, u_z in Function dieser Coordinaten und der Zeit t ausgedrückt werden, und man hätte in unserm Falle, wo das Gefäß immer bis zu gleicher Höhe gefüllt erhalten wird, und daher jene Componenten in Bezug auf die Zeit unveränderlich sind, die bestimmten Beziehungen:

$$u_x = f_1(x, y, z) \quad , \quad u_y = f_2(x, y, z) \quad , \quad u_z = f_3(x, y, z) \; ;$$

folglich auch für den Punkt $x_{,} y_{,} z_{,}$ einer Curve, deren Gleichungen bestimmt werden sollen, die Componenten:

$$\alpha.) \quad w_x = f_1(x_{,}, y_{,}, z_{,}) \; , \quad w_y = f_2(x_{,}, y_{,}, z_{,}) \; , \quad w_z = f_3(x_{,}, y_{,}, z_{,}) \; .$$

Für die Richtung der Geschwindigkeit w selbst oder der Tangente an die gesuchte Curve in demselben Punkte hat man demnach die Beziehungen:

$$\frac{dx_{,}}{ds_{,}} = \frac{w_x}{w} = \frac{f_1}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}} \; , \quad \frac{dy_{,}}{ds_{,}} = \frac{w_y}{w} \; , \quad \frac{dz_{,}}{ds_{,}} = \frac{w_z}{w} \; ,$$

und die Gleichung der Normalebene wird

$$\beta.) \quad (x - x_{,})\,w_x + (y - y_{,})\,w_y + (z - z_{,})\,w_z = 0 \quad .$$

Ist dann $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Gefäßwand, und man eliminirt aus ihr mittels der vorangehenden Gleichung (β) die Veränderliche z, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$\gamma.) \qquad \varphi\,(x, y, x_{,}, y_{,}, w_x, w_y, w_z) = 0 \quad ,$$

welche die Gleichung der Projection des ebenen, zu der gesuchten Curve normalen Schnittes der Gefäßwand in der xy ist, und nach y aufgelöst die Grenzen y_1 und y_0 dieser Veränderlichen, und wenn darin $y = 0$ gesetzt wird, nach x aufgelöst die Grenzen x_1 und x_0 von x für die Integrale zur Berechnung der Fläche dieses Schnittes und der durchgehenden Flüssigkeitsmenge gibt. Die Normale dieses Schnittes macht mit der z-Achse einen Winkel $\nu = arc\cos\frac{w_z}{w}$, man hat daher für seinen Flächeninhalt $O_{,}$ das Integral:

$$O_{,} = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \, . \sec\nu = \frac{w}{w_z} \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \, . \, 1 \quad ,$$

und für die durchgehende Flüssigkeitsmenge $V_{,}$ den Ausdruck:

$$V_{,} = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \cdot v \cos\vartheta \sec\nu = \frac{w}{w_z} \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \cdot v \cos\vartheta \ ,$$

worin $v \cos\vartheta$ die zu jenem Schnitte normale Componente der Geschwindigkeit in einem Punkte $x y z$ desselben bedeutet. Diese Componente läßt sich aber zunächst durch

$$v \cos\vartheta = u_x \frac{w_x}{w} + u_y \frac{w_y}{w} + u_z \frac{w_z}{w}$$

ausdrücken, und es erübrigt für die Möglichkeit der Integration nur noch, in den Functionen $u_x = f_1(x, y, z)$, u. s. f. die Veränderliche z mittels der Gleichung (β) zu eliminiren, wodurch das Integral auf die dem normalen Schnitte angehörigen Punkte beschränkt, und $v \cos\vartheta$ nur eine Function von x und y und der in Bezug auf die Integration constanten Größen $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, w_x, w_y und w_z wird. Da nun die aus der Gleichung (γ) sich ergebenden Grenzen x_0 und x_1 von x auch nur Functionen dieser letztern Größen sind, so erhält man durch die Ausführung der Integration sowohl für $O_{,}$ als $V_{,}$ wieder Functionen derselben Größen, so daß man mit Berücksichtigung der Gleichungen (α) setzen kann

$$O_{,} = F_1(x_{,}, y_{,}, z_{,}) \ , \qquad V_{,} = F_2(x_{,}, y_{,}, z_{,}) \ ,$$

und unsere obigen Bedingungen, nämlich 1) daß die Geschwindigkeit w die mittlere des betreffenden Querschnittes also $w O_{,} = V_{,}$, und 2) daß die durch den Querschnitt hindurchgehende Flüssigkeit $V_{,}$ in jeder Zeiteinheit der aus dem Gefäß austretenden Flüssigkeitsmenge V gleich sei, geben die Gleichungen:

$$w F_1 = F_1 \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2} = F_2 = V \ ,$$

welche die nothwendigen und genügenden Gleichungen der gesuchten Curve sind. Diese Curve ist also wirklich vorhanden und eine ganz bestimmte, und zwar für jedes Gesetz der Bewegung der Flüssigkeitstheilchen und namentlich für das in der Natur wirklich stattfindende, bei welchem die Kräfte S und die an der Gefäßwand stattfindenden Hindernisse der Bewegung volle Berücksichtigung gefunden haben.

Nach den Eigenschaften, die wir für diese Curve, welche wir die Curve der mittleren Geschwindigkeiten nennen wollen, vorausgesetzt haben, können wir nun die ganze Flüssigkeit in dieser Curve,

concentrirt annehmen, in der Art, daß sich jeder normale Querschnitt O, in den entsprechenden Punkt x, y, z, jener Curve zusammenzieht, und die ganze Flüssigkeit in eine flüssige Linie übergeht, deren geometrische Dichte veränderlich und dem Querschnitt O, proportional ist. Ebenso ziehen sich aber auch die Gefäßwände zu einer festen, unbiegsamen Linie zusammen; welche die Gestalt jener Curve hat, und in welcher sich die flüssige Linie wie ein vollkommen biegsamer Faden in gezwungener Bewegung befindet; es wird daher der geometrische Druck N, den die flüssige Linie in irgend einem Punkte auf die feste ausübt, den geometrischen Druck in dem entsprechenden dazu normalen Schnitt des Gefäßes vorstellen, und die Componenten und Momente des physischen Druckes auf die ganze feste Curve vom Spiegel der Flüssigkeit bis zur Ausflußöffnung werden denen des physischen Druckes auf das ganze Gefäß gleich sein.

Nach dieser Vorstellung erhalten wir die Gleichungen für die Bewegung eines beliebigen Punktes der flüssigen Linie, deren Coordinaten wir nun einfach mit x, y, z bezeichnen, wenn wir in die Gleichungen (116) in §. 72 des dritten Buches noch die Componenten $-N_x$, $-N_y$, $-N_z$ des geometrischen Widerstandes einführen, den die feste Curve zu leisten hat, dann die Dichte q durch q O, und die physische Spannung T durch den auf den ganzen Schnitt O, ausgeübten physischen Druck: $-P, O,$ ersetzen, worin dann P, den mittleren geometrischen Druck in dem betreffenden Schnitte bedeutet. Die genannten Gleichungen werden dadurch

$$75.)\quad \begin{cases} q\,O,\dfrac{d\,w_x}{dt} + \dfrac{d\,.\,P,O,\dfrac{dx}{ds}}{ds} = q\,O,X - N_x \\[2ex] q\,O,\dfrac{d\,w_y}{dt} + \dfrac{d\,.\,P,O,\dfrac{dy}{ds}}{ds} = q\,O,Y - N_y \\[2ex] q\,O,\dfrac{d\,w_z}{dt} + \dfrac{d\,.\,P,O,\dfrac{dz}{ds}}{ds} = q\,O,Z - N_z \end{cases}$$

und geben so unmittelbar die drei Componenten des geometrischen Druckes in dem Punkte x y z; diese Werthe sind aber wieder die Änderungsgesetze der physischen Componenten $\mathfrak{N}_x$, $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{N}_z$ in Bezug auf die Änderung der Länge s der Curve von dem Punkte $x_0\, y_0\, z_0$ aus

man erhält daher die Componenten des fördernden Druckes, welcher von der Flüssigkeit auf das ganze Gefäß ausgeübt wird, wenn man die Werthe von N_x, N_y, N_z nach s zwischen den der Spiegelfläche und der Ausflußöffnung entsprechenden Grenzen s_0 und s_1 integrirt. Dazu wird man aber in dem ersten Gliede jener Werthe die Veränderliche t mittels der Beziehung: $w = \frac{ds}{dt}$ eliminiren und ihm die Form:

$q\,O, w\,\frac{d\,w_x}{ds}$, $q\,O, w\,\frac{d\,w_y}{ds}$, $q\,O, w\,\frac{d\,w_z}{ds}$ geben, worin nun der Factor O, w nach unserer Voraussetzung constant und gleich der Ausflußmenge V ist, und erhält so die Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{N}_x &= q\int_{s_0}^{s_1} ds\,.\,O, X - q\,V \mathop{\Delta}_{s_0}^{s_1} w_x - \mathop{\Delta}_{s_0}^{s_1} .\,P, O, \frac{dx}{ds}\,,\\
\mathfrak{N}_y &= q\int_{s_0}^{s_1} ds\,.\,O, Y - q\,V \mathop{\Delta}_{s_0}^{s_1} w_y - \mathop{\Delta}_{s_0}^{s_1} .\,P, O, \frac{dy}{ds}\,,\\
\mathfrak{N}_z &= q\int_{s_0}^{s_1} ds\,.\,O, Z - q\,V \mathop{\Delta}_{s_0}^{s_1} w_z - \mathop{\Delta}_{s_0}^{s_1} .\,P, O, \frac{dz}{ds}\,.
\end{aligned}\right\}$$

Man wird aber nach den Untersuchungen über den hydrostatischen Druck in §. 7 u. ff. leicht einsehen, daß die letzten Glieder dieser Gleichungen, nämlich $\mathop{\Delta}_{s_0}^{s_1} .\,P, O, \frac{dx}{ds}$, u. s. f., nur den Unterschied des auf die Spiegelfläche und die Ausflußöffnung (etwa von einem oder mehreren das Gefäß umgebenden Gasen) ausgeübten Druckes parallel zu den Coordinatenachsen oder den Unterschied des Druckes auf die Projectionen der Spiegelfläche und Ausflußöffnung in der zu der entsprechenden Achse senkrechten Coordinatentafel ausdrücken, indem das obengenannte Glied z. B. die Form: $P_1 O_1 \cos\alpha_1 - P_0 O_0 \cos\alpha_0$ annimmt, wenn man den mittleren Druck auf die Spiegelfläche O_0 mit P_0, den Winkel ihrer Normale mit der x-Achse mit α_0, und dieselben Größen für die Ausflußöffnung O_1 mit P_1 und α_1 bezeichnet, und daß demnach jene Glieder nur denjenigen Theil des fördernden physischen Druckes darstellen, welcher von jenen Gasen auf die ganze Gefäßwand ausgeübt wird; man kann daher von diesen Gliedern und den entsprechenden

in den Gleichungen (75) ganz Umgang nehmen, wenn es sich nur um den von der Flüssigkeit allein auf das ganze Gefäß ausgeübten Druck handelt. Man wird ferner erkennen, daß die ersten Glieder der so vereinfachten Werthe:

$$76.)\quad \begin{cases} \mathfrak{R}_x = q\int_{s_0}^{s_1} ds\,.\,O_s X - qV \Delta_{s_0}^{s_1} w_x\,, \quad \mathfrak{R}_y = q\int_{s_0}^{s_1} ds\,.\,O_s Y - qV \Delta_{s_0}^{s_1} w_y\,, \\ \mathfrak{R}_z = q\int_{s_0}^{s_1} ds\,.\,O_s Z - qV \Delta_{s_0}^{s_1} w_z \end{cases}$$

die fördernden Componenten der von der äußern geometrischen Kraft $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ auf die ganze in dem Gefäße enthaltene Flüssigkeitsmasse ausgeübten physischen Wirkung vorstellen, und daß die letzten Glieder, welche mit der vorhergehenden Bezeichnung die Formen: $qV(v_1 \cos\alpha_1 - v_0 \cos\alpha_0)$, u. s. f. annehmen, die Unterschiede der zu den Achsen parallelen Bewegungsgrößen, mit welchen die in der Zeiteinheit ausfließende und einströmende Flüssigkeitsmasse qV ausfließt und eintritt, ausdrücken und als Kräfte bezeichnet werden können, welche jener Masse qV in der Zeiteinheit den Unterschied der zu der entsprechenden Achse parallelen mittleren Geschwindigkeiten in der Ausflußöffnung und in der Spiegelfläche zu ertheilen vermögen; die Gleichungen (76) sprechen demnach aus, daß die fördernden Componenten des physischen Druckes um diese Kräfte kleiner sind, als die entsprechenden Componenten der von der äußern geometrischen Kraft auf die ganze in dem Gefäße enthaltene Flüssigkeitsmasse ausgeübten Wirkung.

Wenden wir nun diese allgemeine Betrachtung auf den im vorhergehenden §. untersuchten Fall an, nehmen wieder die als eben vorausgesetzte Spiegelfläche als xy-Ebene, und legen die xz-Ebene senkrecht zur Ausflußöffnung, so haben wir

$$X = Y = 0\,,\quad Z = g\,,\quad v_0 \cos\alpha_0 = v_0 \cos\beta_0 = 0\,,\quad v_0 \cos\gamma_0 = v_0\,,$$
$$v_1 \cos\alpha_1 = v_1 \sin\nu\,,\quad v_1 \cos\beta_1 = 0\,,\quad v_1 \cos\gamma_1 = v_1 \cos\nu_1\,.$$

Es wird ferner

$$\int_{s_0}^{s_1} ds\,.\,qO_s Z = gq\int_{s_0}^{s_1} ds\,.\,O_s = gqJ = W\,,$$

wenn J den mit Flüssigkeit erfüllten Rauminhalt des Gefäßes und W das Gewicht der in demselben enthaltenen Flüssigkeit bezeichnet, und man erhält demnach für die förderndem Componenten des von einer schweren Flüssigkeit auf das ganze Gefäß ausgeübten Druckes die Werthe:

$$\mathfrak{N}_y = 0 \;,\quad \mathfrak{N}_x = -qVv_1 \sin\nu \;,\quad \mathfrak{N}_z = W - qV(v_1 \cos\nu - v_0) \;. \quad (\delta.$$

Ist also $\sin\nu = 0$, oder der ausfließende Flüssigkeitsstrahl vertical abwärts oder aufwärts gerichtet, so ist auch $\mathfrak{N}_x = 0$, das Gefäß erleidet dann nur einen verticalen förderndem Druck $\mathfrak{N}_z$, welcher um die Kraft: $qV(v_1 - v_0) = qV\left(\sqrt{v_0^2 + 2gh} - v_0\right)$ d. i. um den Unterschied der Bewegungsgrößen der in der Zeiteinheit ein- und austretenden Masse qV kleiner ist, als das Gewicht der in dem Gefäß enthaltenen Flüssigkeit, wenn der Strahl abwärts ausfließt, und um die Kraft: $qV(v_1 + v_0)$ oder um die Summe jener Bewegungsgrößen größer als jenes Gewicht, wenn die Flüssigkeit aufwärts ausströmt. Vernachlässigt man dabei die Geschwindigkeit v_0 in der Spiegelfläche, so hat man $v_1^2 = 2gh$, also

$$\mathfrak{N}_z = W \mp qO_1 v_1^2 = W \mp 2gqO_1 h \quad ;$$

es ist demnach der verticale Druck auf das ganze Gefäß nahe um das doppelte Gewicht einer Flüssigkeitssäule, welche die Ausflußöffnung zur Grundfläche und ihren Abstand vom Spiegel zur Höhe hat, kleiner oder größer als das Gewicht der ganzen in dem Gefäß enthaltenen Flüssigkeit, je nachdem das Wasser nach unten oder nach oben ausströmt *).

*) Für den nach unten ausfließenden Wasserstrahl läßt sich die oben gefundene Verminderung des Druckes der Flüssigkeit auf das ganze Gefäß auch durch folgende Betrachtung erläutern. Wenn man sich ein von einer Umdrehungsfläche mit verticaler Achse begrenztes Gefäß denkt, dessen horizontale Querschnitte solche Dimensionen haben, daß die mittlere Geschwindigkeit in denselben gerade die der Fallhöhe z vom Spiegel entsprechende ist, daß man also hat:

$$O_1 v_1 = V = O_0 v_0 = O' v' = O' \sqrt{v_0^2 + 2gz} \;,\quad O' = \frac{V}{\sqrt{v_0^2 + 2gz}} \;,$$

so wird für alle diese Querschnitte der von der Flüssigkeit herrührende geometrische Druck $P - P_0$ Null; es muß folglich auch der ganze physische Druck auf dieses Gefäß Null sein. Der Inhalt J′ dieses Gefäßes berechnet sich, wie leicht zu sehen,

$$J' = \int_0^h dz \,.\, O' = V \int_0^h dz \frac{1}{\sqrt{v_0^2 + 2gz}} = \frac{V}{g}\left(\sqrt{v_0^2 + 2gh} - v_0\right) \;;$$

Hat man dagegen $\sin\nu = 1$, $\cos\nu = 0$, so ergeben sich die Componenten

$$\mathfrak{R}_x = - q V v_1 \quad , \quad \mathfrak{R}_z = W + q V v_0 \quad ;$$

das Gefäß erleidet daher in diesem Falle einen horizontalen und dem austretenden Strahl der Richtung nach entgegengesetzten Druck, gleich der Bewegungsgröße der in der Zeiteinheit austretenden Flüssigkeitsmenge oder gleich der Kraft, die der Flüssigkeitsmasse $q V$ in der Zeiteinheit die Austrittsgeschwindigkeit v_1 zu ertheilen vermag, also denselben Druck, als wenn der austretende Strahl in entgegengesetztem Sinne auf die Gefäßwand stoßen und an diese seine ganze Bewegungsgröße abgeben würde. Der verticale Druck ist in diesem Falle nur um die Bewegungsgröße $q V v_0$ der in der Zeiteinheit eintretenden Masse größer als das Gewicht aller in dem Gefäße enthaltenen Flüssigkeit.

Für jede andere Neigung der Ebene der Ausflußöffnung gegen die Spiegelfläche zeigen die obigen allgemeineren Werthe von $\mathfrak{R}_x$ und $\mathfrak{R}_z$, daß man diese Componenten des fördernden physischen Druckes in allen Fällen auf die in den beiden vorhergehenden erklärten zurückführen kann, wenn man statt der Ausflußöffnung selbst deren Projectionen in den Ebenen der $x y$ und $y z$ setzt.

§. 40.

Zur vollständigen Kenntniß der von der Flüssigkeit auf das ganze Gefäß ausgeübten Wirkung ist ferner noch die Kenntniß der drehenden Componenten nothwendig, und um diese zu erhalten, leiten wir zunächst aus den Gleichungen (75) die geometrischen drehenden Componenten

---

und das Gewicht W' derselben ist

$$W' = g q J' = q V \left(\sqrt{v_0^2 + 2 g h} - v_0 \right) \; .$$

In jedes andere Gefäß mit horizontaler Ausflußöffnung kann man sich nun aber ein Gefäß, wie das vorhergehende hineindenken, und es wird dann nur die dieses innere Gefäß umgebende Flüssigkeit $J - J'$ mit ihrem Gewichte $W - W'$ auf das äußere Gefäß drücken; es werden dabei aber alle übrigen äußern Verhältnisse, wie die Geschwindigkeiten in der Spiegelfläche und Ausflußöffnung, die Ausflußmenge und daher namentlich auch die Aenderung der Bewegungsgröße dieser in der Zeiteinheit ein- und austretenden Flüssigkeitsmenge dieselben, wie in dem Falle, wo jenes innere Gefäß nicht vorhanden ist; es wird also auch der letzte äußere Zustand, der ganze physische Druck auf das Gefäß in beiden Fällen derselbe sein.

ab, indem wir die zweite dieser Gleichungen mit x, die erste mit y multipliziren und die Differenz der Producte nehmen, dann die erste mit z, die dritte mit x multipliziren und das zweite Product von dem ersten abziehen, u. s. f., dabei aber von den Kräften $P_{,} O_{,}$ wie bei den Gleichungen (76) Umgang nehmen. Wir erhalten so zunächst

$$\left.\begin{aligned} xN_y - yN_x &= qO_{,}(xY - yX) - qO_{,}\left(x\frac{dw_y}{dt} - y\frac{dw_x}{dt}\right), \\ zN_x - xN_z &= qO_{,}(zX - xZ) - qO_{,}\left(z\frac{dw_x}{dt} - x\frac{dw_z}{dt}\right), \\ yN_z - zN_y &= qO_{,}(yZ - zY) - qO_{,}\left(y\frac{dw_z}{dt} - z\frac{dw_y}{dt}\right); \end{aligned}\right\} \quad (77.$$

eliminirt man dann wieder in den letzten Gliedern die Veränderliche t mittels der Beziehung $w = \frac{ds}{dt}$, ersetzt das constante Product $O_{,}w$ durch V, und integrirt jede Gleichung in Bezug auf s zwischen den der Ausflußöffnung und der Spiegelfläche entsprechenden Grenzen s_1 und s_0, so findet man die physischen drehenden Wirkungen um die drei Coordinaten-Achsen:

$$\int_{s_0}^{s_1} ds\,(xN_y - yN_x) = \mathfrak{x}_2\mathfrak{N}_y - \mathfrak{y}_1\mathfrak{N}_x, \quad \int_{s_0}^{s_1} ds\,(zN_x - xN_z) = \mathfrak{z}_1\mathfrak{N}_x - \mathfrak{x}_3\mathfrak{N}_z,$$

$$\int_{s_0}^{s_1} ds\,(yN_z - zN_y) = \mathfrak{y}_3\mathfrak{N}_z - \mathfrak{z}_2\mathfrak{N}_y,$$

durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_z &= \mathfrak{x}_2\mathfrak{N}_y - \mathfrak{y}_1\mathfrak{N}_x = q\int_{s_0}^{s_1} ds.O_{,}(xY - yX) - qV\underset{s_0}{\overset{s_1}{\Delta}}(xw_y - yw_x), \\ \mathfrak{M}_y &= \mathfrak{z}_1\mathfrak{N}_x - \mathfrak{x}_3\mathfrak{N}_z = q\int_{s_0}^{s_1} ds.O_{,}(zX - xZ) - qV\underset{s_0}{\overset{s_1}{\Delta}}(zw_x - xw_z), \\ \mathfrak{M}_x &= \mathfrak{y}_3\mathfrak{N}_z - \mathfrak{z}_2\mathfrak{N}_y = q\int_{s_0}^{s_1} ds.O_{,}(yZ - zY) - qV\underset{s_0}{\overset{s_1}{\Delta}}(yw_z - zw_y), \end{aligned}\right\} (78^a.$$

von denen die erste die drehende Wirkung des von der Flüssigkeit herrührenden Druckes auf das ganze Gefäß um die z=Achse, die zweite die um die y=Achse, die dritte die um die x=Achse ausdrückt, und in welchen $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ die Coordinaten der Richtung der allgemeinen Resultirenden $\mathfrak{N}_x$ aller parallelen Kräfte N_x bedeuten, und $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{z}_2$ die Richtung von $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{x}_3$, $\mathfrak{y}_3$ die Richtung von $\mathfrak{N}_z$ als allgemeinen Resultirenden der parallelen Kräfte N_y und N_z bestimmen *).

Die ersten Glieder der rechten Seite dieser Gleichungen stellen offenbar die drehenden Gesammtwirkungen der in dem ganzen Gefäß enthaltenen Flüssigkeit um die drei Coordinatenachsen vor, und die letzten Glieder drücken die Unterschiede der Momente der Bewegungsgrößen der in jeder Zeiteinheit aus- und eintretenden Flüssigkeitsmenge V in Bezug auf dieselben Achsen aus. Diesen letzten Gliedern wird man aber für die Anwendung eine zweckmäßigere Form geben, wenn man nach §. 73 des ersten Buches

$$x\,w_y - y\,w_x = r'^2 \frac{d\omega'}{dt} \quad \text{durch} \quad p'\,w'$$

$$z\,w_x - x\,w_z = r''^2 \frac{d\omega''}{dt} \quad \text{durch} \quad p''\,w'' \text{, u. s. f.}$$

ersetzt, worin w' die Projection der Geschwindigkeit w in der xy=Ebene und p' den senkrechten Abstand dieser Projection von der z=Achse bezeichnet, und die p'', w'' und p'''; w''' ähnliche Bedeutungen in Bezug auf die y= und die x=Achse haben. Beachtet man dann noch, daß $w' = w \sin\nu$, $w'' = w \sin\mu$, $w''' = w \sin\lambda$ gesetzt werden kann, wenn die Winkel λ, μ, ν die Richtung der Geschwindigkeit w bestimmen, und nimmt wieder für die Ausflußöffnung $w = v_1$, $\lambda = \alpha_1$, $\mu = \beta_1$, $\nu = \gamma_1$, $p' = p'_1$, $p'' = p''_1$, etc., für die Spiegelfläche $w = v_0$, $\lambda = \alpha_0$, $\mu = \beta_0$, $\nu = \gamma_0$, $p' = p'_0$, $p'' = p''_0$, etc., so nehmen die Gleichungen (78ᵃ) die Form an:

*) Im jetzigen Falle lassen sich aber diese Richtungen nicht so allgemein bestimmen, wie bei dem hydrostatischen Drucke, denn dazu müßte man von den Gleichungen:

$$x\,N_y = x\,Y\,O, - q\,O, x\,\frac{dw_y}{dt} = x\,Y\,O, - q\,V\,x\,\frac{dw_y}{ds}\ ,$$

u. s. f.

ausgehen, welche aber wegen des letzten Gliedes nicht mehr allgemein, d. h. ohne die Gestalt der Curve der mittleren Geschwindigkeit zu kennen, nach s integrirt werden können.

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{M}_z &= q\int_{s_0}^{s_1} ds\,.\,O,(xY-yX) - qV(v_1 p'_1 \sin\gamma_1 - v_0 p'_0 \sin\gamma_0)\;, \\
\mathfrak{M}_y &= q\int_{s_0}^{s_1} ds\,.\,O,(zX-xZ) - qV(v_1 p''_1 \sin\beta_1 - v_0 p''_0 \sin\beta_0)\;, \\
\mathfrak{M}_x &= q\int_{s_0}^{s_1} ds\,.\,O,(yZ-zY) - qV(v_1 p'''_1 \sin\alpha_1 - v_0 p'''_0 \sin\alpha_0)\;,
\end{aligned}\right\} \quad (78^b.$$

und sprechen so nun augenfällig aus, daß die drehenden Wirkungen, welche die durch das Gefäß strömende Flüssigkeit auf das ganze Gefäß ausübt, um die Unterschiede der Momente der Bewegungsgrößen der in einer Zeiteinheit aus- und eintretenden Flüssigkeitsmasse qV kleiner ist, als die drehenden Wirkungen der in dem Gefäß enthaltenen und in Ruhe befindlichen Flüssigkeit.

Nehmen wir als Anwendung unsere schwere Flüssigkeit und legen das Coordinatensystem wie früher so, daß die positive z-Achse vertical abwärts gerichtet und die xz-Ebene senkrecht zur Ausflußöffnung ist, so haben wir

$$X = 0\;, \quad Y = 0\;, \quad Z = g$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\pi - \nu\;,\; \beta_1 = \frac{1}{2}\pi\;,\; \gamma_1 = \nu\;,\; \alpha_0 = \frac{1}{2}\pi\;,\; \beta_0 = \frac{1}{2}\pi\;,\; \gamma_0 = 0\;,$$

und wenn wir noch die Coordinaten des Schwerpunktes der Spiegelfläche mit x_0, y_0, z_0, die des Ortes der mittleren Geschwindigkeit in der Ausflußöffnung mit x_1, y_1, z_1, endlich die des Schwerpunktes der in dem Gefäß enthaltenen in Ruhe gedachten Flüssigkeit mit $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ bezeichnen, so wird

$$p_1' \sin\gamma_1 = x_1 \cos\beta_1 - y_1 \cos\alpha_1 = -y_1 \sin\nu\;, \quad p_0' \sin\gamma_0 = 0\;,$$

$$p_1'' \sin\beta_1 = z_1 \cos\alpha_1 - x_1 \cos\gamma_1 = z_1 \sin\nu - x_1 \cos\nu\;, \quad p_0'' \sin\beta_0 = -x_0\;,$$

$$p_1''' \sin\alpha_1 = y_1 \cos\gamma_1 - z_1 \cos\beta_1 = y_1 \cos\nu\;, \quad p_0''' \sin\alpha_0 = y_0\;,$$

$$\int_{s_0}^{s_1} ds\,.\,O,x = J\mathbf{X}\;, \quad \int_{s_0}^{s_1} ds\,.\,O,y = J\mathbf{Y}\;, \quad gqJ = W\;,$$

und damit folgen die Werthe:

$$\begin{cases} \mathfrak{M}_z = q V v_1 y_1 \sin\nu \ , \\ \mathfrak{M}_y = - W X - q V [v_1 (z_1 \sin\nu - x_1 \cos\nu) + v_0 x_0] \ , \\ \mathfrak{M}_x = W Y - q V (v_1 y_1 \cos\nu - v_0 y_0) \ . \end{cases}$$

Diese werden dann noch einfacher, wenn man die z-Achse durch den Schwerpunkt der in dem Gefäße enthaltenen Flüssigkeit legt, weil man dann $X = 0$, $Y = 0$ hat; sie kommen so auf

$$\varepsilon.) \begin{cases} \mathfrak{M}_z = q V v_1 y_1 \sin\nu \ , \quad \mathfrak{M}_x = - q V (v_1 y_1 \cos\nu - v_0 y_0) \ , \\ \mathfrak{M}_y = - q V [v_1 (z_1 \sin\nu - x_1 \cos\nu) + v_0 x_0] \end{cases}$$

zurück, und geben für eine horizontale Ausflußöffnung mit abwärts ausfließendem Strahl, für welche $\nu = 0$ wird, und unter der Voraussetzung, daß v_0 sehr klein ist gegen v_1, oder daß der Schwerpunkt der Spiegelfläche auch in die z-Achse fällt,

$$\mathfrak{M}_z = 0 \ , \quad \mathfrak{M}_x = - q V v_1 y_1 \ , \quad \mathfrak{M}_y = q V v_1 x_1 \ ,$$

oder da im jetzigen Falle die xz-Ebene immer senkrecht zur Ausflußöffnung ist, und man daher das Coordinatensystem immer so drehen kann, daß diese Ebene zugleich den Schwerpunkt des Gefäßes und den Schwerpunkt der Ausflußöffnung enthält, also $y_1 = 0$ wird,

$$\mathfrak{M}_z = 0 \ , \quad \mathfrak{M}_x = 0 \ , \quad \mathfrak{M}_y = q R v_1 x_1 \ ;$$

wenn demnach der Schwerpunkt der Ausflußöffnung, der im jetzigen Falle der Punkt der mittleren Geschwindigkeit ist, nicht auch in der z-Achse liegt, so übt die ausströmende Flüssigkeit noch eine drehende Wirkung um eine durch den Schwerpunkt der in dem Gefäß enthaltenen Flüssigkeit gehende und zu der verticalen Ebene, die beide Schwerpunkte enthält, senkrechte Achse aus, und diese drehende Wirkung ist wieder dieselbe, als wenn der ausströmende Strahl in entgegengesetztem Sinne auf das Gefäß träfe; sie rührt aber einfach davon her, daß der eigentliche Schwerpunkt der auf die Gefäßwand drückenden Flüssigkeit nicht der Schwerpunkt des Gefäßraumes oder der darin enthaltenen Flüssigkeit ist, sondern auf der der Ausflußöffnung entgegengesetzten Seite jener horizontalen Achse, der nunmehrigen y-Achse liegt, und darf deßhalb nicht so betrachtet werden, als ob der ausfließende Strahl eine sogenannte Reaction auf die in dem Gefäß enthaltene Flüssigkeit ausübe.

Hat man dagegen $sin\, \nu = 1$, $cos\, \nu = 0$, so folgen aus (ε) die Werthe:

$$\mathfrak{M}_z = q\,V\,v_1\,y_1 \quad , \qquad \mathfrak{M}_y = -\,q\,V\,v_1\,z_1 \quad , \qquad \mathfrak{M}_x = 0 \quad ,$$

vorausgesetzt, daß wieder v_0 vernachlässigt werden kann, oder $x_0 = y_0 = 0$ ist. Wir haben daher in diesem Falle eine drehende Wirkung um die verticale z=Achse und die horizontale zur Ausflußöffnung parallele y=Achse von ähnlicher Form wie im vorhergehenden Falle und von gleicher Größe, als wenn der ausfließende Strahl rückwärts, gegen die geschlossene Ausflußöffnung gerichtet wäre und seine ganze Bewegungsgröße an diese abgäbe. Die Ursache für diese drehende Wirkung, sowie für die entsprechende fördernde $\mathfrak{R}_x = -\,q\,V\,v_1$ ist aber eine ganz andere, als vorher; sie liegt hier in der Aenderung der Bewegungsrichtung und ist die gewöhnlich mit dem Namen Reaction bezeichnete resultirende drehende oder fördernde Wirkung des dynamischen und des zur Richtung der Bewegung normalen statischen Druckes der Flüssigkeitstheilchen, welcher, wie schon oben bemerkt wurde, auf die Geschwindigkeit der Bewegung ohne Einfluß ist.

Dieselbe Ursache liegt dann auch der fördernden und der drehenden Wirkung zu Grunde, welche bei einem aus einer horizontalen Oeffnung vertical aufsteigenden Strahle in Bezug auf das ganze Gefäß zum Vorschein kommen und welche dem des abwärts fließenden Strahles gleich, nur dem Sinne nach entgegengesetzt sind.

§. 41.

Bei dem bisher betrachteten Falle der fließenden Bewegung einer schweren tropfenbildenden Flüssigkeit wurde der Zustand durch gleichen Zu= und Abfluß unverändert erhalten; es waren daher alle vorkommenden Größen von der Zeit unabhängig oder vielmehr in Bezug auf die Zeit unveränderlich; wir müssen nun noch einen Schritt weiter gehen und zeigen, wie die Verhältnisse sich ändern, wenn die Bedingung des gleichen Zu= und Abflusses nicht erfüllt wird.

Wenn der Zufluß größer oder kleiner ist, als die ausfließende Flüssigkeitsmenge, so muß der Spiegel der Flüssigkeit steigen oder sinken; es wird also die Höhe z desselben über einem bestimmten horizontalen Querschnitt des Gefäßes und in Folge dessen auch die Geschwindigkeit v und der Druck P in diesem Querschnitt mit der Zeit veränderlich; alle diese Größen sind daher, wie schon früher bemerkt wurde, augenblickliche und geben die Aenderungsgesetze der mit der Zeit werdenden Größen

in Bezug auf die Zeit. Da wir aber wie vorher gezeigt wurde bei dem jetzigen Zustande der Analysis nicht im Stande sind, die augenblicklichen oder in Bezug auf die Zeit constant bleibenden Größen von einer einzigen Veränderlichen abhängig zu machen, so können wir noch viel weniger die mit der Zeit eintretenden Aenderungen jener Größen allgemein ausdrücken und müssen uns demnach auch hier auf solche Querschnitte beschränken, für welche eine jener Größen bekannt ist, d. i. auf die Spiegelfläche und die Ausflußöffnung, weil für diese wenigstens der Druck als bekannt vorausgesetzt werden kann, und die augenblickliche Ausflußmenge V mit der Geschwindigkeit v_0 in der Spiegelfläche O_0 durch die angenäherte Gleichung:

a.) $$O_0 v_0 = V$$

in Beziehung gesetzt werden kann.

Bezeichnen wir daher wie früher mit h den Abstand einer durch die Ausflußöffnung gezogenen horizontalen Geraden von der horizontalen xy=Ebene und mit z_0 den nun veränderlichen Abstand der Spiegelfläche von dieser Ebene, und bestimmen wir wieder die Punkte der Ausflußöffnung durch die Coordinaten η und ζ, welche auf jene horizontale Gerade und eine zweite in der Ebene der Ausflußöffnung senkrecht zu derselben gezogenen Achse bezogen werden, und durch den Winkel ν zwischen der Normalen zur Ausflußöffnung und der z=Achse, so haben wir für die Ausflußgeschwindigkeit v_1 in einem beliebigen horizontalen Schnitte nun den Werth:

79.) $$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2g(h - z_0 + \zeta \sin\nu)}$$

und demnach für die augenblickliche Ausflußmenge V oder das Aenderungsgesetz der zeitlichen Ausflußmenge $\mathfrak{V}$ in Bezug auf die Zeit den Ausdruck [§. 37, Gl. (i)]:

80.) $$V = \frac{d\mathfrak{V}}{dt} = \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} d\zeta \, . \, (\eta_1 - \eta_0) \sqrt{v_0^2 + 2g(h - z_0 + \zeta \sin\nu)} ,$$

worin v_0 die augenblickliche Geschwindigkeit in der Spiegelfläche bedeutet, welche wieder, wie die Ordinate z_0 für alle Punkte dieser Fläche als gleich vorausgesetzt wird und daher wie diese für die Integration in Bezug auf ζ constant ist.

Diese Geschwindigkeit v_0 setzt sich aber nun aus zwei andern Geschwindigkeiten zusammen, nämlich aus der Geschwindigkeit w_0, mit

welcher die Flüssigkeit durch die Spiegelfläche fließt, und aus der Geschwindigkeit $u_0 = \frac{dz_0}{dt}$, mit welcher der Spiegel selbst sinkt. Denn bezeichnet man mit C einen constanten Zufluß in der Zeiteinheit, so wird man für die Ausflußmenge $\mathfrak{V}$ in der Zeit t, wenn die Spiegelfläche am Anfang dieser Zeit als xy-Ebene genommen, also $z_0 = 0$ ist für $t = 0$, den Ausdruck:

$$\mathfrak{V} = Ct + \int_0^{z_0} dz_0 \,.\, O_0 \,, \qquad (81^a.$$

in welchem natürlich O_0 als Function von z_0 einzuführen ist, haben, weil in der Zeit t nicht nur der Zufluß Ct, sondern auch die in dem leer gewordenen Raume: $\int_0^{z_0} dz_0 \,.\, O_0$ enthaltene Flüssigkeit durch die Ausflußöffnung gegangen sein muß; daraus folgt aber

$$V = O_0 v_0 = \frac{d\mathfrak{V}}{dt} = C + O_0 \frac{dz_0}{dt} \,, \quad v_0 = \frac{C}{O_0} + \frac{dz_0}{dt} \,, \qquad (82.$$

und man wird leicht erkennen, daß $\frac{C}{O_0} = w_0$ die Geschwindigkeit ist, mit welcher die zufließende Menge C durch die Spiegelfläche fließt, während $\frac{dz_0}{dt}$ offenbar die Geschwindigkeit der Spiegelfläche selbst ausdrückt, und es leuchtet ein, daß für ein kleineres C als V der Spiegel sinken, also $\frac{dz_0}{dt}$ positiv sein muß, und entgegengesetzt im entgegengesetzten Falle, wie es aus der ersten der Beziehungen (82) hervorgeht.

Hat man demnach die augenblickliche Ausflußmenge V mittels des Integrals (80) berechnet, und so durch die der Ausflußöffnung zugehörigen Constanten und die Veränderliche z_0 ausgedrückt, so wird man diesen Werth in die erste der Beziehungen (82) für V einführen, darin v_0 durch die zweite dieser Gleichungen eliminiren und die sich ergebende Gleichung nach $\frac{dz_0}{dt}$ auflösen; dadurch erhält man eine Gleichung von der Form:

$$83^a.)\qquad \frac{d z_0}{d t} = f(z_0) \quad \text{oder} \quad \frac{d t}{d z_0} = \frac{1}{f(z_0)} ,$$

und diese gibt durch Integration den Werth von t in Function von z_0, d. h. die Zeit, in welcher der Spiegel der Flüssigkeit um die Höhe z_0 sinkt oder steigt. Daraus kann dann auch, wenn die Gleichung nach z_0 lösbar ist, z_0 in Function von t erhalten, und so, sei es durch die Gleichung (80) oder noch einfacher durch (81ᵃ) die Ausflußmenge 𝔅 in der Zeit t berechnet werden.

Wenn der Zufluß nicht constant ist, so drückt die Größe C, welche dann in Function von t gegeben sein muß, ähnlich wie V, die augenblickliche Zuflußmenge aus; man hat also

$$81^b.)\qquad \mathfrak{B} = \int_0^t dt \,.\, C + \int_0^z dz_0 \,.\, O_0 ,$$

und daraus ergibt sich der Werth von V oder $\frac{d\mathfrak{B}}{dt}$ in derselben Form (82) wie oben, nur mit dem Unterschiede, daß C nicht constant, sondern eine Function von t ist. Der Werth von $\frac{d z_0}{d t}$ erscheint demnach nun in der Form:

$$83^b.)\qquad \frac{d z_0}{d t} = f(z_0, t) ,$$

welche die Integration wesentlich erschwert und die Bestimmung von z_0 in Function von t auch unter den einfachsten Voraussetzungen nicht mehr durchführbar erscheinen läßt, da schon die Auflösung der Gleichung (82) nach $\frac{d z_0}{d t}$, wie aus der Bemerkung im Anfang des §. 38 in Betreff der Elimination von v_0^2 hervorgeht, in den einfachsten Fällen nur annäherungsweise möglich ist.

Etwas einfacher wird die Sache, wenn die Ausflußöffnung während der Zeit t immer hinlänglich klein bleibt gegen die Spiegelfläche O_0, um v_0^2 in dem Werthe von V vernachlässigen zu können. Man hat dann für ein constantes C, was wir hier allein berücksichtigen werden, aus (80) und (82) unmittelbar

$$\frac{dt}{dz_0} = \frac{O_0}{V - C} = \frac{O_0}{\int_{\zeta_0}^{\zeta_1} d\zeta\,(\eta_1 - \eta_0)\sqrt{2g(h - z_0 + \zeta \sin\nu)} - C}$$

und demnach, und da O_0 im Allgemeinen eine Function von z_0 ist,

$$t = \int_{z_0}^{z_1} dz_0 \cdot \frac{O_0}{\int_{\zeta_0}^{\zeta_1} d\zeta\,(\eta_1 - \eta_0)\sqrt{2g(h - z_0 + \zeta \sin\nu)} - C} \quad (85.$$

Bei diesem Integral hat man indessen mehrere Fälle zu unterscheiden, nämlich 1) den Fall, wo die Ausflußöffnung schon vom Anfang der Zeit t an bis zum Spiegel reicht, 2) den Fall, wo der Spiegel die Ausflußöffnung während der Zeit t nicht oder gerade noch erreicht, und 3) den Fall, wo der Spiegel anfänglich über der höchsten Tangente der Ausflußöffnung liegt und am Ende der Zeit t die Ausflußöffnung schneidet. Alle diese Fälle lassen sich leicht aus den Grenzwerthen ζ_0 und z_0 erkennen, und der dritte Fall muß durch Theilung der Integrale auf die beiden ersten Fälle zurückgeführt werden. Wir wollen jedoch die weitere Erläuterung dieser verschiedenen Fälle sogleich mit Beispielen über die Form des Gefäßes und der Ausflußöffnung begleiten, und deshalb zu diesen besonderen Untersuchungen übergehen.

§. 42.

Die einfachsten Fälle sind offenbar diejenigen, bei welchen die Ebene der Ausflußöffnung horizontal ist; man hat dann $\sin\nu = 0$, und die Gleichung (85) nimmt die Form an:

$$t = \int_0^{z_0} dz_0 \cdot \frac{O_0}{O_1\sqrt{2g(h - z_0)} - C} = \frac{1}{O_1}\int_0^{z_0} dz_0 \cdot \frac{O_0}{\sqrt{2g(h - z_0)} - c}, \quad (a.$$

worin c eine solche Geschwindigkeit bezeichnet, daß man hat $C = O_1 c$. Bleibt nun auch O_0 von $z_0 = 0$ bis $z_0 < h$ constant, ist also das Gefäß zwischen diesen Grenzen von z_0 prismatisch, so wird einfacher:

$$\frac{O_1}{O_0} t = \int_0^{z_0} dz_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2g(h-z_0)} - c} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{z_0} dz_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{h-z_0} - \sqrt{k}}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{2g}} \mathop{\Delta}_0^{z_0} \left[\sqrt{h-z_0} - \sqrt{k} + \sqrt{k}\, logn \left(\sqrt{h-z_0} - \sqrt{k}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2g}} \left[\left(\sqrt{h} - \sqrt{h-z_0}\right) + \sqrt{k}\, logn \frac{\sqrt{h} - \sqrt{k}}{\sqrt{h-z_0} - \sqrt{k}}\right].$$

In diesem Ausdruck darf aber z_0 keinen solchen Werth erhalten, daß $\sqrt{h-z_0} - \sqrt{k} < 0$ wird, weil das letzte Glied zeigt, daß für $h - z_0 = k$ man schon $t = \infty$ erhält, daß also der Spiegel der Flüssigkeit niemals so tief sinken kann, bis $O_1 \sqrt{2g(h-z_0)} = C$ oder $z_0 = h - k$ wird, d. h. bis die Ausflußmenge V in der Zeiteinheit dem Zufluß C gleich wird. Daraus folgt dann weiter, daß wenn $k = h$ ist, z_0 nie größer als 0 werden kann, und daß z_0 für ein $k > h$ negativ werden, die Flüssigkeit also steigen muß, endlich daß auch dann die Bedingung: $z_0 = h - k$ die Grenze des Steigens ausdrückt, welche erst in unendlicher Zeit erreicht wird.

Wenn k, also $C = 0$ ist, so hat man einfach

$$O_1 t \sqrt{2gh} = O_1 v_1 t = Vt = 2 O_0 \left[h - \sqrt{h(h-z_0)}\right] ,$$

wenn v_1 die Ausflußgeschwindigkeit und V die Ausflußmenge für die Zeiteinheit bei der constanten Druckhöhe h ist, und daraus folgt für z_0 den Werth:

$$z_0 = \gamma v_1 t - \frac{\gamma^2 v_1^2 t^2}{4h} = x - \frac{x^2}{4h} ,$$

worin zuerst γ für $\frac{O_1}{O_0}$ und dann x für $\gamma v_1 t$ gesetzt ist, und welcher zeigt, daß die Beziehung zwischen z_0 und x, welchem t proportional ist, durch eine Parabel BOS Fig. 21, dargestellt werden kann, deren Achse im Sinne der negativen z gerichtet und deren Parameter 2h ist, und deren Brennpunkt F in dem anfänglichen Spiegel AB der Flüssigkeit liegt, während ihr Scheitel S die Ebene der Ausflußöffnung CD

berührt; man wird aber leicht einsehen, daß für den vorliegenden Fall nur der Zweig BOS dieser Curve Bedeutung hat, so daß der Ordinate $BN = z_0$ nur die Abscisse $NO = x$ entspricht.

Um ferner auch ein einfaches Beispiel einer veränderlichen Spiegelfläche bei horizontaler Ausflußöffnung zu geben, soll das Gefäß von oben bis nahe zu der Ausflußöffnung, welche sich immer in stetiger Ausbiegung an das Gefäß anschließe, die Form eines Umdrehungsparaboloides haben, dessen Scheitel die Ebene der Ausflußöffnung berührt, dessen erzeugende Curve also durch die Gleichung: $x^2 = 2p(h - z_0)$ ausgedrückt wird; es ist dann

$$O_0 = \pi x^2 = 2\pi p\,(h - z_0) \quad ,$$

und damit folgt bei ähnlicher Bezeichnung wie vorher das Integral:

$$O_1 t = \int_0^{z_0} dz_0 \cdot \frac{2\pi p\,(h - z_0)}{\sqrt{2g}\left(\sqrt{h - z_0} - \sqrt{k}\right)} \, ,$$

das zunächst am besten auf die Form:

$$O_1 t = \frac{2\pi p}{\sqrt{2g}} \int_{\sqrt{h - z_0}}^{\sqrt{h}} du \, . \left(2u^2 + 2u\sqrt{k} + 2k + \frac{2\sqrt{k^3}}{u - \sqrt{k}}\right)$$

gebracht wird, und so die gesuchte Beziehung:

$$O_1 t = \frac{2\pi p}{\sqrt{2g}} \left[\frac{2}{3}\left(\sqrt{h^3} - \sqrt{(h - z_0)^3}\right) + z_0\sqrt{k} + 2k\left(\sqrt{h} - \sqrt{h - z_0}\right) + 2\sqrt{k^3}\ \mathit{logn}\ \frac{\sqrt{h} - \sqrt{k}}{\sqrt{h - z_0} - \sqrt{k}} \right]$$

zwischen t und z_0 gibt. Auch diese ist, wie die vorhergehende nur für $k = 0$ in Bezug auf z_0 oder einfacher in Bezug auf $h - z_0 = z'$ auflösbar, und gibt dann für diesen Abstand der Spiegelfläche von der Ausflußöffnung den Ausdruck:

$$z' = \left(\sqrt{h^3} - \frac{3\,O_1 t \sqrt{2g}}{4\pi p}\right)^3 .$$

Vernachlässigt man dabei die geringe Abweichung der Gestalt des Gefäßes in der Nähe der Ausflußöffnung von der für den obern Theil angenommenen, so kann man auch $z_0 = h$, $z' = 0$ setzen, und findet so für die Zeit, in welcher das Gefäß sich ganz entleert, den Werth:

$$t' = \frac{4\pi p h^2}{3 O_1 \sqrt{2gh}} = \frac{4}{3}\frac{J}{O_1 v_1} = \frac{4}{3} t_1 ,$$

da man offenbar für den Inhalt J des Gefäßes den Ausdruck hat:

$$J = \int_0^h dz \,.\, O = \pi \int_0^h dz \,.\, x^2 = 2\pi p \int_0^h dz \,.\, (h-z) = \pi p h^2 .$$

Die Zeit für die gänzliche Entleerung ist also nur $\frac{4}{3}$ von der Zeit t_1, in welcher eine gleiche Flüssigkeitsmenge bei der constanten Druckhöhe h ausfließen würde.

Sei nun die Ausflußöffnung in einer verticalen Wand, und zwar zunächst ein Rechteck mit horizontaler Grundlinie, welches bis zum anfänglichen Spiegel der Flüssigkeit reicht. Man hat dann für das Integral im Nenner des Werthes (85) den Ausdruck:

$$\int_{-(h-z_0)}^{0} d\zeta \,.\, b\sqrt{2g(h-z_0+\zeta)} = \frac{2}{3} b\sqrt{2g} \,.\, \sqrt{(h-z_0)^3} ,$$

worin b die Breite der Ausflußöffnung und h den Abstand der Grundlinie von der anfänglichen Spiegelfläche bezeichnet. Setzt man dann noch

$$C = \frac{2}{3} b\sqrt{2g k^3} ; \quad k^3 = \left(\frac{3C}{2b\sqrt{2g}}\right)^2 ,$$

so wird die Gleichung (85)

$$\text{b.)} \qquad t = \int_0^{z_0} dz_0 \,.\, \frac{O_0}{\frac{2}{3} b\sqrt{2g}\left[\sqrt{(h-z_0)^3} - \sqrt{k^3}\right]}$$

und gibt für ein constantes O_0 zunächst den Ausdruck:

$$\frac{b\sqrt{2g}}{3\,O_0}\,t = \frac{1}{2}\int_0^{z_0} dz \, . \, \frac{1}{\sqrt{(h-z_0)^3}-\sqrt{k^3}} = \int_{\sqrt{h-z_0}}^{\sqrt{h}} du \, . \, \frac{u}{u^3-m^3}\,, \quad (e.$$

worin u für $\sqrt{h-z_0}$, m für $\sqrt{k}$ gesetzt ist. Macht man dann noch $u = w - \frac{m}{2}$, so kann man dem Nenner: $u^3 - m^3$ die Form: $\left(w - \frac{3}{2}m\right)\left(w^2 + \frac{3}{4}m^2\right)$ geben und darnach den Bruch $\frac{u}{u^3-m^3}$ durch die Summe:

$$\frac{2}{3m(2w-3m)} - \frac{4w}{3m(4w^2+3m^2)} + \frac{2}{4w^2+3m^2},$$

ausdrücken, und findet so leicht den Ausdruck:

$$\frac{b\sqrt{2g}}{3\,O_0}\,t = \Delta_{\sqrt{h-z_0}}^{\sqrt{h}} \, . \, \frac{1}{3m}\left(logn \frac{u-m}{\sqrt{u^2+um+m^2}} + \sqrt{3}\, arc\,tang \frac{2u+m}{m\sqrt{3}}\right),$$

welcher nach Einführung des Werthes für m und der Grenzwerthe für u die Form annimmt:

$$\frac{b\sqrt{2gk}}{O_0}\,t = \frac{1}{2}\,logn \frac{\left(\sqrt{h}-\sqrt{k}\right)^3\left(\sqrt{(h-z_0)^3}-\sqrt{k^3}\right)}{\left(\sqrt{h^3}-\sqrt{k^3}\right)\left(\sqrt{h-z_0}-\sqrt{k}\right)^3}$$

$$+\sqrt{3}\left(arc\,tg\frac{2\sqrt{h}+\sqrt{k}}{\sqrt{3k}} - arc\,tg\frac{2\sqrt{h-z_0}+\sqrt{k}}{\sqrt{3k}}\right).$$

Dieser Ausdruck zeigt mit Berücksichtigung des im Zähler und Nenner des ersten Gliedes überflüssig enthaltenen Factors: $\sqrt{h-z_0}-\sqrt{k}$; daß t unendlich wird für $\sqrt{h-z_0}=\sqrt{k}$; d. h. daß eine unendliche Zeit erfordert wird, bis der Spiegel so weit sinkt, daß der Abfluß dem Zufluß gleich wird.

Wenn k oder C Null ist, muß man auf das vorhergehende ursprüngliche Integral (c) zurückgehen; dieses wird dann sehr einfach und gibt den Werth:

d.) $$t = \frac{3\,O_0}{b\sqrt{2gh}}\left(\sqrt{\frac{h}{h-z_0}} - 1\right),$$

welcher für $z_0 = h$ ebenfalls unendlich wird, also für das vollständige Entleeren eine unendliche Zeit bestimmt.

Um nun ein veränderliches O_0 zu erhalten, wollen wir dem Gefäß die Gestalt einer abgestumpften Pyramide mit einer verticalen Seitenwand geben, deren kleinere Grundfläche den Boden des Gefäßes bilde und zugleich die in der verticalen Wand angebrachte Ausflußöffnung begrenze. Bezeichnet man daher die ursprüngliche Spiegelfläche mit F_0, die Fläche des Bodens mit F_1, so hat man (II. Buch, §. 60)

$$O_0 = \frac{1}{h^2}\left[h\sqrt{F_1} + (h-z_0)\left(\sqrt{F_0} - \sqrt{F_1}\right)\right]^2;$$

und wenn man $\sqrt{\frac{F_0}{F_1}} - 1$ durch β ersetzt, so wird die Gleichung (b) mit den frühern Substitutionen

$$\frac{bh^2\sqrt{2g}}{3F_1}\,t = \frac{1}{2}\int_0^{z_0} dz_0 \cdot \frac{[h+\beta(h-z_0)]^2}{\sqrt{(h-z_0)^3}-\sqrt{k^3}} = \int_{\sqrt{h-z_0}}^{\sqrt{h}} du \cdot \frac{u(h+\beta u^2)^2}{u^3-m^3}.$$

Dieser Ausdruck läßt sich dann auf die Form:

$$\frac{bh^2\sqrt{2g}}{3F_1}\,t = \mathop{\Delta}_{\sqrt{h-z_0}}^{\sqrt{h}} \cdot \left(\frac{1}{3}\beta^2u^3+2\beta hu\right) + \int_{\sqrt{h-z_0}}^{\sqrt{h}} du \cdot \frac{\beta^2m^3u^2+h^2u+2\beta hm^3}{u^3-m^3}$$

bringen und nun das letzte Glied wie im vorhergehenden Falle in Partialbrüche mit den Nennern $w - \frac{3}{2}m$ und $w^2 + \frac{3}{4}m^2$ zerlegen. Es soll jedoch die Ausführung dieser Operation dem Leser überlassen bleiben und nur der Fall betrachtet werden, wo F_1 so klein gegen F_0 ist, daß man es vernachlässigen, also $F_1 = 0$ nehmen kann. Für diesen Fall wird $O_0 = F_0\,\frac{(h-z_0)^2}{h^2}$, und damit folgt nach (b)

$$\frac{b h^2 \sqrt{2g}}{3 F_0}\, t = \frac{1}{2}\int_0^{z_0} d z_0 \cdot \frac{(h-z_0)^2}{\sqrt{(h-z_0)^3}-\sqrt{k^3}} = \int_{\sqrt{h-z_0}}^{\sqrt{h}} du \cdot \left(u^2 + \frac{m^3 u^2}{u^3-m^3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{h^3}-\sqrt{(h-z_0)^3}+\sqrt{k^3}\, logn \frac{\sqrt{h^3}-\sqrt{k^3}}{\sqrt{(h-z_0)^3}-\sqrt{k^3}}\right).$$

Für $k = 0$ hat man demnach einfach

$$t = \frac{F_0}{b h \sqrt{2 g h}}\left(h - (h-z_0)\sqrt{1 + \frac{z_0}{h}}\right),$$

und daraus für die zum gänzlichen Entleeren nothwendige Zeit

$$T = \frac{F_0 h}{b h \sqrt{2 g h}} = \frac{3 J}{b h \sqrt{2 g h}} = 3 t_1 = \frac{3}{2} t_2 ,$$

d. i. das Dreifache der Zeit, in welcher eine gleiche Flüssigkeitsmenge durch eine der anfänglichen gleiche horizontale Ausflußöffnung bei der constanten Druckhöhe h ausfließen würde, und das $1\frac{1}{2}$fache der Zeit, bei welcher dieselbe Flüssigkeitsmenge bei constantem Spiegel aus der verticalen Oeffnung $b h$ sich ergießen würde.

Wenn die Ausflußöffnung nicht bis zum Spiegel reicht, dann ist schon in den einfachsten Fällen und wenn selbst C gleich Null angenommen wird, der Nenner des Integrales (85) so wenig einfach, daß in den wenigsten jener Fälle an eine Ausführung dieses Integrales in geschlossener Form gedacht werden kann.

Nehmen wir z. B. wieder ein Gefäß von constantem Querschnitt und eine verticale rechteckige Ausflußöffnung von der Breite b, deren oberer horizontaler Rand um h, und deren unterer um H vom anfänglichen Spiegel entfernt ist, so nimmt jener Nenner mit Weglassung des Zuflusses C die Form an:

$$\int_0^{H-h} d\zeta \,.\, b\sqrt{2g(h-z_0+\zeta)} = \frac{2}{3}\, b\sqrt{2g}\left[\sqrt{(H-z_0)^3}-\sqrt{(h-z_0)^3}\right]$$

und der Werth (85) geht in den Ausdruck über:

$$\text{e.)}\quad \frac{2b\sqrt{2g}}{3O_0}\, t = \int_0^{z_0} dz_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{(H-z_0)^3} - \sqrt{(h-z_0)^3}}\,,$$

worin aber der Grenzwerth z_0 höchstens gleich h werden kann, weil für ein größeres z_0 der Spiegel der Flüssigkeit die Ausflußöffnung schneidet und dann von dem Augenblick an, wo der Spiegel den oberen Rand der Ausflußöffnung erreicht hat, der vorige Fall eintritt. Für $z_0 > h$ hat man daher zur Bestimmung der Zeit t den zusammengesetzten Ausdruck:

$$\text{f.)}\quad \frac{2b\sqrt{2g}}{3.O_0}\, t = \int_0^{h} dz_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{(H-z_0)^3} - \sqrt{(h-z_0)^3}} + \int_h^{z_0} dz_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{(H-z_0)^3}}\,,$$

in welchem das erste Glied die Zeit t_1 gibt, in welcher die Spiegelfläche bis zum obern Rand der Oeffnung sinkt, und das zweite die Zeit t_2 von da an bis dieselbe den Abstand z_0 von ihrer anfänglichen Lage erreicht.

Das letztere Glied ist in der Gleichung (d) zwischen den Grenzen z_0 und 0 ausgedrückt, und man wird nach diesem leicht finden, daß man hat

$$\int_h^{z_0} dz_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{(H-z_0)^3}} = 2\int_{\sqrt{H-z_0}}^{\sqrt{H-h}} du \cdot \frac{1}{u^2} = \frac{2}{\sqrt{H-h}}\left(\sqrt{\frac{H-h}{H-z_0}} - 1\right),$$

was für die zuletzt genannte Zeit t_2 den Werth:

$$t_2 = \frac{3O_0}{b\sqrt{2g(H-h)}}\left(\sqrt{\frac{H-h}{H-z_0}} - 1\right)$$

gibt, welcher übrigens auch aus dem Werth (d) hervorgeht, wenn man darin H — h für h einführt, da am Anfang dieser Zeit t_2 die Spiegelfläche der Flüssigkeit den Abstand H — h von dem untern Rande der Ausflußöffnung hat.

Um nun die Gleichung (e) zu integriren, bringt man die Größe unter dem Integral-Zeichen zuerst auf die Form:

$$\frac{\sqrt{(H-z_0)^3} + \sqrt{(h-z_0)^3}}{(H-z_0)^3 - (h-z_0)^3} = \frac{1}{H-h} \cdot \frac{\sqrt{(H-z_0)^3} + \sqrt{(h-z_0)^3}}{3z_0^2 - 3z_0(H+h) + H^2 + Hh + h^2}\,,$$

oder indem man $H + h = 2h'$, $H - h = 2a$ setzt, und den Zähler zerlegt,

$$\frac{1}{2a}\left(\frac{\sqrt{(h'+a-z_0)^3}}{3z_0^2-6h'z+3h'^2+a^2}+\frac{\sqrt{(h'-a-z_0)^3}}{3z_0^2-6h'z+3h'^2+a^2}\right).$$

Macht man dann in dem ersten Glied $h' + a - z_0 = u^2$, so wird dasselbe rational und nimmt, mit $\frac{dz_0}{du}$ multiplizirt nach den erforderlichen Reductionen die Form:

$$-\frac{u^4}{a[3(u^2-a)^2+a^2]} = -\frac{1}{3a} - \frac{2}{3}\,\frac{u^2-\frac{2}{3}a}{(u^2-a)^2+\frac{1}{3}a^2},$$

an, deren letztes Glied sich zwar in Partialbrüche mit den imaginären Nennern: $u^2 - a\left(1+\frac{1}{3}\sqrt{-3}\right)$ und $u^2 - a\left(1-\frac{1}{3}\sqrt{-3}\right)$ zerlegen läßt. Man müßte aber diese Brüche um sie integriren zu können nochmals zerlegen und es wird dann schwer, die imaginären Größen wieder zu beseitigen; es ist daher zweckmäßiger, den Nenner $u^4 - 2au^2 + \frac{4}{3}a^2$ auf eine entsprechendere Form zu bringen. Dazu macht man $u = y_1\sqrt[4]{\frac{4}{3}a^2}$ und findet so

$$\frac{2}{3}\,\frac{u^2-\frac{2}{3}a}{u^4-2au^2+\frac{4}{3}a^2} = \frac{1}{3a}\,\frac{y_1^2\sqrt{3}-1}{y_1^4-y_1^2\sqrt{3}+1} = \frac{1}{3a}\,\frac{2y_1^2\cos\frac{\pi}{6}-1}{y_1^4-2y_1^2\cos\frac{\pi}{6}+1},$$

und man wird dann leicht den Nenner des letzten Bruches in die Factoren:

$$y_1 - \left(\cos\frac{\pi}{12} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{\pi}{12}\right) \text{ und } y_1 + \left(\cos\frac{\pi}{12} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

zerlegen, in welchen nun die imaginären Glieder ausgeschieden sind.

Setzt man zur Abkürzung $\cos\frac{\pi}{12} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{\pi}{12} = \beta$ und $\cos\frac{\pi}{12} - \sqrt{-1}\,\sin\frac{\pi}{12} = \gamma_1$, so findet man für die Zähler A, B,

C, D der Partialbrüche $\frac{A}{y+\beta}$, $\frac{B}{y-\beta}$, $\frac{C}{y+\gamma}$, $\frac{D}{y-\gamma}$ leicht die Werthe:

$$-A=\frac{2\beta^2\cos\frac{\pi}{6}-1}{2\beta(\beta^2-\gamma^2)}=B\quad,\quad C=\frac{2\gamma^2\cos\frac{\pi}{6}-1}{2\gamma(\beta^2-\gamma^2)}=-D\quad,$$

oder da man hat $2\beta_1^2\cos\frac{\pi}{6}-1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$,

$\beta_1^2-\gamma_1^2=2i\sin\frac{\pi}{6}$, $\beta_1\gamma_1=1$, wenn $i=\sqrt{-1}$,

$$B=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\gamma_1}{4i\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2i}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-\sqrt{-2}\right),$$

$$C=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)\beta_1}{4i\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2i}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{-2}\right).$$

Ganz in derselben Weise ergibt sich, wenn $h'-a-z_0=v=y_2\sqrt[4]{\frac{4a^2}{3}}$ gesetzt wird, nach und nach

$$\frac{\sqrt{(h'-a-z_0)^3}}{3z_0^2-6h'z+3h'^2+a^2}\,\frac{dv}{dz_0}=-\frac{1}{3a}+\frac{2}{3}\,\frac{v^2+\frac{2}{3}a}{(v^2+a)^2+\frac{1}{3}a^2}$$

$$=-\frac{1}{3a}\left(1-\frac{y_2^2\sqrt{3}+1}{y_2^4+y_2^2\sqrt{3}+1}\right)=-\frac{1}{3a}\left(1+\frac{2y_2^2\cos\frac{5}{6}\pi-1}{y_2^4-2y_2^2\cos\frac{5}{6}\pi+1}\right)$$

und daraus folgt durch weitere Zerlegung wie vorher

$$\frac{2y_2^2\cos\frac{5}{6}\pi-1}{y_2^4-2y_2^2\cos\frac{5}{6}\pi+1}=\frac{\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi}{4i\sin\frac{5}{6}\pi}\left(\frac{1}{y_2-\beta_2}-\frac{1}{y_2+\beta_2}\right)$$

$$-\frac{\cos\frac{5}{4}\pi-i\sin\frac{5}{4}\pi}{4i\sin\frac{5}{6}\pi}\left(\frac{1}{y_2-\gamma_2}-\frac{1}{y_2+\gamma_2}\right),$$

worin β_2 für $\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}$, γ_2 für $\cos\frac{5\pi}{12}-i\sin\frac{5\pi}{12}$ steht. Mit diesen verschiedenen Zerlegungen geht dann die Gleichung (α) in folgende über, worin die Integrationsgrenzen H', z'_1, h' und z'_2 nach der Reihe die Werthe: $\sqrt[4]{\frac{3H^2}{4a^2}}$, $\sqrt[4]{\frac{3(H-z_0)^2}{4a^2}}$, $\sqrt[4]{\frac{3h^2}{4a^2}}$ und $\sqrt[4]{\frac{3(h-z_0)^2}{4a^2}}$ ersetzen:

$$\frac{2b\sqrt{2g}}{3O_0}t=\frac{1}{3a}\left(\sqrt{H}-\sqrt{h}-\sqrt{H-z_0}+\sqrt{h-z_0}\right)$$
$$+\frac{1}{3a}\sqrt[4]{\frac{4a^2}{3}}\int_{z'_1}^{H'}dy_1\left[\frac{\sqrt{2}-\sqrt{-2}}{4}\left(\frac{1}{y_1-\beta_1}-\frac{1}{y_1+\beta_1}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{-2}}{4}\left(\frac{1}{y_1-\gamma_1}-\frac{1}{y_1+\gamma_1}\right)\right]$$
$$-\frac{1}{3a}\sqrt[4]{\frac{4a^2}{3}}\int_{z'_2}^{h'}dy_2\left[\frac{\sqrt{2}-\sqrt{-2}}{4}\left(\frac{1}{y_2-\beta_2}-\frac{1}{y_2+\beta_2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{-2}}{4}\left(\frac{1}{y_2-\gamma_2}-\frac{1}{y_2+\gamma_2}\right)\right],$$

und wenn nun die Integrationen ausgeführt und die Glieder mit reellen Coeffizienten, sowie die mit imaginären Coeffizienten vereinigt werden, so findet man mit Berücksichtigung der Werthe für β_1, γ_1, β_2, γ_2 den Ausdruck:

$$\frac{2ab\sqrt{2g}}{O_0}t=\sqrt{H}-\sqrt{h}-\left(\sqrt{H-z_0}-\sqrt{h-z_0}\right)$$
$$+\sqrt[4]{\frac{4a^2}{3}}\frac{\sqrt{2}}{4}\Delta_{z'_1}^{H'}\left[\operatorname{logn}\frac{y_1^2-2y_1\cos\frac{\pi}{12}+1}{y_1^2+2y_1\cos\frac{\pi}{12}+1}+\frac{1}{i}\operatorname{logn}\frac{y_1^2-2iy_1\sin\frac{\pi}{12}-1}{y_1^2+2iy_1\sin\frac{\pi}{12}-1}\right]$$
$$-\sqrt[4]{\frac{4a^2}{3}}\frac{\sqrt{2}}{4}\Delta_{z'_2}^{h'}\left[\operatorname{logn}\frac{y_2^2-2y_2\cos\frac{5\pi}{12}+1}{y_2^2+2y_2\cos\frac{5\pi}{12}+1}+\frac{1}{i}\operatorname{logn}\frac{y_2^2-2iy_2\sin\frac{5\pi}{12}-1}{y_2^2+2iy_2\sin\frac{5\pi}{12}-1}\right],$$

in welchem noch die mit $\frac{1}{i}$ multiplizirten Logarithmen imaginärer Zahlen durch reelle Winkel auszudrücken sind. Dazu setzt man

$$\frac{y_1^2 - 2 i y_1 \sin \frac{\pi}{12} - 1}{y_1^2 + 2 i y_1 \sin \frac{\pi}{12} - 1} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi ,$$

und zieht daraus die beiden Gleichungen:

$$(y_1^2 - 1)(1 - \cos \varphi) = \mp 2 y_1 \sin \frac{\pi}{12} \sin \varphi$$

$$- 2 y_1 \sin \frac{\pi}{12} (1 + \cos \varphi) = \pm (y_1^2 - 1) \sin \varphi$$

welche gleichzeitig durch denselben Werth von φ befriedigt werden müssen. Man zieht in der That aus jeder derselben

$$\text{tang}\, \frac{1}{2} \varphi = \mp \frac{2 y_1 \sin \frac{\pi}{12}}{y_1^2 - 1} ;$$

nimmt man daher das untere Zeichen, so wird

$$\frac{1}{i} \text{logn} \frac{y_1^2 - 2 i y_1 \sin \frac{\pi}{12} - 1}{y_1^2 + 2 i y_1 \sin \frac{\pi}{12} - 1} = \frac{1}{i} \text{logn} (\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

$$= - \varphi = - 2\, \text{arc tang} \frac{2 y_1 \sin \frac{\pi}{12}}{y_1^2 - 1} .$$

In gleicher Weise folgt dann auch

$$\frac{1}{i} \text{logn} \frac{y_2^2 - 2 i y_2 \sin \frac{5\pi}{12} - 1}{y_2^2 + 2 i y_2 \sin \frac{5\pi}{12} - 1} = - 2\, \text{arc tang} \frac{2 y_2 \sin \frac{5\pi}{12}}{y_2^2 - 1} ,$$

und dem Werthe von t kann damit die Form gegeben werden:

$$\frac{2ab\sqrt{2g}}{O_0}\,t = \sqrt{H} - \sqrt{h} - \left(\sqrt{H-z_0} - \sqrt{h-z_0}\right)$$

$$+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{H'}{3a\sqrt{3}}}\;\Delta.\left[\log n \frac{y_1^2 - 2y_1 \cos\frac{\pi}{12} + 1}{\sqrt{y_1^4 - 2y_1^2 \cos\frac{\pi}{6} + 1}} - \operatorname{arctg}\frac{2y_1 \sin\frac{\pi}{12}}{y_1^2 - 1}\right]_{z'_1}$$

$$-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{h'}{3a\sqrt{3}}}\;\Delta.\left[\log n \frac{y_2^2 - 2y_2 \sin\frac{\pi}{12} + 1}{\sqrt{y_2^4 + 2y_2^2 \cos\frac{\pi}{6} + 1}} - \operatorname{arctg}\frac{2y_2 \cos\frac{\pi}{12}}{y_2^2 - 1}\right]_{z'_2}$$

Werden endlich in diesen Ausdruck noch die oben angegebenen Werthe für H', z'_1, h' und z'_2 eingeführt, so kann darnach die Zeit berechnet werden, innerhalb welcher der Spiegel um die Höhe z_0 sinkt; die Zeit t_1, in welcher der Spiegel den obern Rand der Oeffnung erreicht, folgt daraus, wenn man $z_0 = h$ also $z'_2 = 0$ setzt und für z'_1 den Werth: $\sqrt[4]{\frac{3(H-h)^2}{4a^2}}$ einführt. Die weitere Ausführung kann füglich dem sich dafür interessirenden Leser anheimgestellt werden.

§. 43.

In derselben Weise, wie die Gleichung (68^a) für die Untersuchung besonderer Fälle der fließenden Bewegung einer homogenen, schweren tropfenbildenden Flüssigkeit gedient hat, wird die Gleichung (68^b) bei homogenen schweren Gasen Anwendung finden, und es kann hier die Untersuchung noch dadurch wesentlich vereinfacht werden, daß man von der Schwere der Gase ganz Umgang nehmen kann, und es dann ganz gleichgültig ist, welche Lage die Ebene der Ausflußöffnung hat.

Die Gleichung (68^b) gibt nämlich für ein schweres homogenes Gas die allgemeine Beziehung:

$$P \log n \frac{P}{P_0} + \frac{1}{2} q (v^2 - v_0^2) = qg(z - z_0) \qquad (86.$$

zwischen dem Druck P und der Geschwindigkeit v in der Richtung der Bewegung an dem Orte, dessen Coordinaten x, y, z sind, und der

Spannung P_0 und der Geschwindigkeit v_0 in dem Punkte $x_0 y_0 z_0$, ebenfalls in der Richtung der Bewegung genommen; man zieht daraus für die Ausflußgeschwindigkeit v_1 den Ausdruck:

$$v_1^2 = v_0^2 + 2g\left(z_1 - z_0 + \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}}\, logn \frac{P_0}{P_1}\right)$$

und wird leicht einsehen, daß man für diejenigen Fälle, in denen der Druck P_1 auf die Ausflußöffnung nicht der innern Spannung P_0 gleich oder gar etwas größer ist, als diese, in denen also $logn\, P_0 - logn\, P_1$ nicht sehr klein ist, und in welchen der Höhenunterschied $z_1 - z_0$ zwischen einem Punkt $x_1 y_1 z_1$ der Ausflußöffnung und dem höchsten Punkte innerhalb des Gefäßes ziemlich klein ist gegen die Druckhöhe $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}}$, welche auch für die schwersten Gase mehrere tausend Meter beträgt (§. 12), daß man in diesen Fällen für die erste Annäherung, namentlich im Hinblick auf die Vernachlässigung der Kräfte S zwischen den Gastheilchen, die Differenz $z_1 - z_0$ neben dem letzten Gliede der vorhergehenden Gleichung vernachlässigen kann. Läßt man dann noch zu, daß es einen ebenen Querschnitt in dem Gefäße gibt, der in allen Punkten senkrecht zur Richtung der Bewegung der Gastheilchen und in welchem die Geschwindigkeit v_0 derselben constant ist, so wird auch die augenblickliche innere Spannung P_0 für alle Punkte dieses Querschnittes und demnach auch die Geschwindigkeit v_1 für alle Punkte der Ausflußöffnung constant und die augenblickliche oder dauernde Ausflußmenge von der Lage der Ausflußöffnung unabhängig werden. Behalten wir endlich auch hier unsere frühere Voraussetzung über die Form der Ausflußöffnung bei, nach welcher auch die Richtung der Geschwindigkeit für alle Punkte der Ausflußöffnung dieselbe ist, so haben wir nun für die Berechnung der Ausflußmenge nur zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich 1) den Fall, wo die innere Spannung P_0 und der äußere Gegendruck P_1 in Bezug auf die Zeit constant erhalten werden, und 2) den, wo die eine oder die andere dieser Spannungen oder beide zugleich in Bezug auf die Zeit veränderlich sind.

Wenn P_0 und P_1 in Bezug auf die Zeit constant sind, so hat man mit der vorhergehenden Beschränkung einfach

87ᵃ.) $$v_1^2 = v_0^2 + 2g\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}}\, logn \frac{P_0}{P_1}, \quad V_1 = O_1 v_1 = O_1 \sqrt{v_0^2 + 2g\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}}\, logn \frac{P_0}{P_1}},$$

worin nun die in der Zeiteinheit ausfließende Gasmenge unter dem in

oder vor der Ausflußöffnung stattfindenden Drucke P_1 dem Raume nach gemessen mit V_1 bezeichnet wird. Dieselbe Gasmenge würde aber nach dem Mariotte'schen Gesetz in dem Gefäß unter dem Drucke P_0 und bei gleicher Temperatur den Raum:

$$V_0 = \frac{P_1}{P_0} V_1 = \frac{P_1 O_1 v_1}{P_0}$$

einnehmen, und da die innere Spannung constant bleiben soll, so muß die Gasmenge V_0 auch durch den Querschnitt O_0 des Gefäßes fließen, in welchem die Geschwindigkeit v_0 constant oder doch die mittlere ist; man hat also auch

$$V_0^2 = O_0^2 v_0^2 = \frac{P_1^2 O_1^2}{P_0^2} v_1^2$$

und zieht daraus durch Elimination von v_0 den Werth:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{p}} \, logn \frac{P_0}{P_1}}{1 - \frac{P_1^2 O_1^2}{P_0^2 O_0^2}}} \qquad (87^b.$$

mit welchem dann auch die Werthe von V_1 und V_0 nur von den Spannungen in und vor dem Gefäß und von den Flächenmaßen der Ausflußöffnung und dem bestimmten Querschnitte O_0, worin der Druck P_0 constant oder der mittlere ist, abhängig werden. Für sehr kleine Ausflußöffnungen, im Verhältniß zu dem Querschnitt O_0 des Gefäßes kann man daher mit hinreichender Annäherung

$$v_1 = \sqrt{2g \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{p}} \, logn \frac{P_0}{P_1}} \quad , \qquad V_1 = O_1 \sqrt{2g \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{p}} \, logn \frac{P_0}{P_1}}$$

setzen, und wenn dann noch das Verhältniß $\frac{P_0}{P_1}$ nicht viel größer als 1 ist, so daß, wenn man $P_0 = P_1(1 + \alpha)$ setzt, α ein kleiner Bruch wird, so hat man

$$logn \frac{P_0}{P_1} = logn (1 + \alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \text{etc.}, \quad \alpha = \frac{P_0 - P_1}{P_1} = \frac{P'}{P_1},$$

indem man den Unterschied zwischen der innern und äußern Spannung

mit P' bezeichnet, und mit Vernachlässigung des Quadrates und der höhern Potenzen von α folgt mit fast gleicher Genauigkeit $\alpha - \frac{\alpha^2}{2} = \alpha$ oder $= \frac{\alpha}{1+\alpha}$, also

$$v_1 = \sqrt{2g \frac{P}{p} \frac{P'}{P_1}} = \sqrt{2g \frac{P}{p} \frac{P'}{P_0}}.$$

Es ist aber auch $\frac{P}{p} = \frac{P_0}{p_0} = \frac{P_1}{p_1}$, wenn p_0 und p_1 die Gewichte einer Volumeneinheit des betreffenden Gases unter den Spannungen P_0 und P_1 bezeichnen, man kann daher auch mit jener Annäherung

$$v_1 = \sqrt{2g \frac{P'}{p_1}} = \sqrt{2g h_1} = \sqrt{2g \frac{P'}{p_0}} = \sqrt{2g h_0}$$

setzen, und es werden dann h_1 und h_0 die Höhen zweier Flüssigkeitssäulen von den Dichten p_1 und p_0 vorstellen, welche durch ihr Gewicht den geometrischen Druck P' in ihren Grundflächen erzeugen. Die Höhe h_1 ist etwas zu groß, und h_0 etwas zu klein; man erhält daher eine größere Genauigkeit, wenn man

$$v_1 = \sqrt{g(h_0 + h_1)}$$

nimmt, oder noch besser, wenn man $\alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3}$ durch $\frac{\alpha}{1+\frac{1}{2}\alpha}$ ersetzt, wodurch sich mit den Bedingungen: $P_1 = p_1 H_1$, $P_0 = p_0 H_0$, die angenäherten Werthe:

$$v_1 = \sqrt{2g h_1 \left(1 - \frac{h_1}{2H_1}\right)} = \sqrt{2g h_0 \left(1 + \frac{h_0}{2H_0}\right)}$$

ergeben.

Wenn die Spannung in dem Gefäß, welches das Gas enthält, nicht constant erhalten wird, entweder dadurch, daß neues Gas in dasselbe eintritt, oder dadurch, daß der Raum, welchen das Gas einnimmt, entsprechend vermindert wird, wenn also dieser Raum, der mit J bezeichnet werde, unverändert bleibt und das ausgeströmte Gas nicht durch neues ersetzt wird, so wird sich die innere Spannung P_0 in einem bestimmten

Querschnitt theils in Folge des Mariotte'schen Gesetzes wegen Verminderung der in dem Raume J enthaltenen Gasmenge, theils wegen der Aenderung der Geschwindigkeit v_0 ändern. Ist nun diese letztere überhaupt sehr klein gegen die Ausflußgeschwindigkeit, so kann man in einer kleinen Zeit Δt von ihrer Aenderung Umgang nehmen und die Aenderung $\Delta_t P_0$ von P_0 während dieser kleinen Zeit nur nach dem Mariotte'schen Gesetze bestimmen. Bezeichnet man dazu mit $\Delta_t \mathfrak{V}_0$ die in der Zeit Δt ausfließende Gasmenge unter dem anfänglichen innern Drucke P_0 während derselben Zeit Δt gemessen, so hat man:

$$\frac{P_0 + \Delta_t P_0}{P_0} = \frac{J - \Delta_t \mathfrak{V}_0}{J}, \quad \frac{\Delta_t P}{\Delta t} = -\frac{P_0}{J} \frac{\Delta_t \mathfrak{V}_0}{\Delta t},$$

also auch

$$\frac{dP_0}{dt} = -\frac{P_0}{J} \frac{d\mathfrak{V}_0}{dt}. \quad (88.$$

Es ist aber auch $\frac{d\mathfrak{V}_0}{dt} = V_0 = \frac{P_1 V_1}{P_0}$ und man hat demnach

$$\frac{dP_0}{dt} = -O_1 \sqrt{2g \frac{P}{p} \, logn \frac{P_0}{P_1}}$$

wonach sich mittels des Integrals:

$$O_1 t = \int_{P_0}^{P_0^{(0)}} dP_0 \frac{1}{\sqrt{2g \frac{P}{p} \, logn \frac{P_0}{P_1}}} = \frac{P_1}{\sqrt{2g \frac{P}{p}}} \int_{logn \frac{P_0}{P_1}}^{logn \frac{P_0^{(0)}}{P_1}} du \frac{e^u}{\sqrt{u}} \quad (89)$$

die Zeit t berechnen läßt, in welcher die innere Spannung in einem bestimmten Querschnitte von der anfänglichen $P_0^{(0)}$ auf P_0 herabsinkt. Dieses Integral läßt sich nicht in geschlossener Form darstellen, aber leicht durch eine convergirende Reihe ausdrücken, aus welcher durch Umkehrung $\sqrt{logn \frac{P_0}{P_1}} = \sqrt{u}$ in Function von t gezogen werden kann und muß, um mittels der Beziehungen:

$$\frac{d\,\mathfrak{B}_1}{dt} = V_1 = O_1 \sqrt{2g\,\frac{P}{p}\,logn\,\frac{P_0}{P_1}}\ , \quad \mathfrak{B}_1 = O_1 \sqrt{2g\,\frac{P}{p}} \int_0^t dt\,.\sqrt{u}$$

die in der Zeit t ausgeflossene Gasmenge unter dem äußern constanten Drucke P_1 gemessen, berechnen zu können.

In ähnlicher Weise wird auch der Fall behandelt, wenn ein Gas aus einem Gefäß in ein anderes geschlossenes Gefäß übergeht, worin die Spannung anfänglich kleiner ist als in jenem und allmälig wächst, bis sie in beiden Gefäßen gleich geworden ist.

Was endlich noch den Druck oder die Spannung des Gases innerhalb des Gefäßes betrifft, so kann man diese auch hier wie bei den tropfenbildenden Flüssigkeiten nur unter Zulassung des Satzes vom Parallelismus der Schichten bestimmen, nach welchem in jedem horizontalen Querschnitte des Gefäßes die Geschwindigkeiten aller Gastheilchen gleich und parallel gerichtet angenommen werden. Wird dann das Gas in dem Gefäß in demselben Maße erneuert, in dem es ausfließt, so daß die Spannung in demselben für jeden horizontalen Querschnitt in Bezug auf die Zeit constant bleibt, so hat man für irgend einen solchen Querschnitt, dessen Flächeninhalt O und worin der Druck und die Geschwindigkeit P und v ist, die für viele Fälle angenähert richtige Beziehung:

$$90.)\qquad P\,O\,v = P_0\,O_0\,v_0 = P_1\,O_1\,v_1\ ,$$

und diese mit der Gleichung (86) verbunden gibt die Geschwindigkeit und die Spannung für einen bestimmten Querschnitt, der um $z - z_0$ unter dem Querschnitt O_0 oder um $z_1 - z$ über der horizontal oder sehr klein gedachten Ausflußöffnung liegt, durch die Gleichungen:

$$91.)\quad \begin{cases} v^2 - v_0^2 + 2\,\frac{P}{q}\,logn\,\frac{O_0\,v_0}{O_0} = 2g\,(z - z_0)\ , \\ v_1^2\left(\frac{P_1^2\,O_1^2}{P^2\,O^2} - \frac{P_1^2\,O_1^2}{P_0^2\,O_0^2}\right) + 2\,\frac{P}{q}\,logn\,\frac{P}{P_0} = 2g\,(z - z_0)\ . \end{cases}$$

Vernachlässigt man in der letzten das Glied $2g\,(z - z_0)$ und ersetzt v_1 durch seinen Werth (87^b) so folgt die Beziehung:

$$92.)\quad \left(\frac{P_0^2\,O_0^2}{P^2\,O^2} - 1\right) logn\,\frac{P_0}{P_1} = \left(\frac{P_0^2\,O_0^2}{P_1^2\,O_1^2} - 1\right) logn\,\frac{P_0}{P}\ ,$$

durch welche P aus den Spannungen P_0 und P_1 und den Flächen O_0, O_1 und O berechnet werden kann.

Diese letztere Gleichung gibt dann auch für den Fall, wo das Gas nicht erneuert wird und die Spannung im Gefäße sich ändert, die augenblickliche Spannung P am Ende der Zeit t, wenn die augenblickliche Spannung P_0 für diesen Augenblick mittels der Gleichung (89) berechnet worden ist, natürlich unter denselben annähernd richtigen Voraussetzungen, wie vorher.

Dagegen kann der Druck, welcher im Falle eines dauernden Zustandes oder einer in Bezug auf die Zeit constanten Spannung innerhalb und außerhalb des Gefäßes von dem ausströmenden Gase auf das ganze Gefäß ausgeübt wird, auch hier durch die in §. 39 entwickelte Betrachtung gefunden werden, da der dort geführte Beweis für das Vorhandensein einer Curve, in welcher die Geschwindigkeit die mittlere für den dazu normalen Querschnitt ist und zugleich eine solche, daß die durch diesen Querschnitt hindurchgehende Gasmenge $V_{,}$ in jeder Zeiteinheit und unter gleichem Drucke gemessen der aus dem Gefäß austretenden Gasmenge V_1 gleich ist, von der Natur der Flüssigkeit völlig unabhängig war, also auch hier für die Gase seine Gültigkeit behält. Es bleiben demnach die dort aufgestellten allgemeinen Gleichungen (75) auch für unsern jetzigen Fall gültig, nur ist darin q nicht constant, sondern von dem Drucke P_1 abhängig. Ersetzt man daher in den ersten Gliedern jener Gleichungen nach dem Mariotte'schen Gesetze q durch $q\frac{P_1}{P}$, so nehmen diese nach der Elimination von t die Form an:

$$\left.\begin{aligned} N_x &= q\,O_{,}X - \frac{q}{P}P_{,}O_{,}w\frac{dw_x}{ds} - \frac{d\,.\,P_{,}O_{,}\frac{dx}{ds}}{ds}, \\ N_y &= q\,O_{,}Y - \frac{q}{P}P_{,}O_{,}w\frac{dw_y}{ds} - \frac{d\,.\,P_{,}O_{,}\frac{dy}{ds}}{ds}, \\ N_z &= q\,O_{,}Z - \frac{q}{P}P_{,}O_{,}w\frac{dw_z}{ds} - \frac{d\,.\,P_{,}O_{,}\frac{dz}{ds}}{ds} \end{aligned}\right\} \quad (93.$$

Erwägt man dann, daß $O_{,}w = V_{,}$, $P_{,}V_{,} = P_1V_1$ und $q\,P_1 = q_1 P$, so wird man erkennen, daß das Product $\frac{q}{P}P_{,}O_{,}w$ constant ist und

durch $q_1 V_1^2$ ersetzt werden kann, wenn q_1 die Dichte des ausströmenden Gases ist. Man erhält demnach für die physischen Componenten $\mathfrak{R}_x$, $\mathfrak{R}_y$, $\mathfrak{R}_z$ in gleicher Weise wie in §. 39 die Werthe:

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{R}_x &= \int_{s_0}^{s_1} ds \,.\, qOX - q_1 V_1 \Delta_{s_0}^{s_1} w_x - \Delta_{s_0}^{s_1} \,.\, P_1 O_1 \frac{dx}{ds}, \\
\mathfrak{R}_y &= \int_{s_0}^{s_1} ds \,.\, qOY - q_1 V_1 \Delta_{s_0}^{s_1} w_y - \Delta_{s_0}^{s_1} \,.\, P_1 O_1 \frac{dy}{ds}, \\
\mathfrak{R}_z &= \int_{s_0}^{s_1} ds \,.\, qOZ - q_1 V_1 \Delta_{s_0}^{s_1} w_z - \Delta_{s_0}^{s_1} \,.\, P_1 O_1 \frac{dz}{ds},
\end{aligned}\right.$$

in welchen sich die Integrations-Grenzen s_0 und s_1 auf den Anfang und das Ende jener gedachten Curve beziehen und daher offenbar den Mittelpunkten der Oeffnungen entsprechen, durch welche das Gas ein- und austritt. Die ersten Glieder der rechten Seiten sind wieder die fördernden physischen Componenten der von der Resultirenden der äußern Kräfte auf die in dem Gefäß enthaltene Gasmenge ausgeübten Wirkung; sie drücken daher in Bezug auf schwere Gase die Componenten des Gewichtes der in dem Gefäß enthaltenen Gasmenge aus und können in den meisten Fällen ganz vernachlässigt werden. Ebenso kann man von den letzten Gliedern, wie bei den tropfenbildenden Flüssigkeiten Umgang nehmen, da dieselben auch hier nur die wirksamen fördernden Componenten des von innen und außen auf die ganze Gefäßwand ausgeübten statischen Druckes bedeuten, da dieser durch den Widerstand der Gefäßwand größtentheils unwirksam gemacht wird und sich daher auf den negativen Druck reduzirt, welcher von der innern geometrischen Spannung auf die Oeffnung für den Eintritt des Gases und von der äußern auf die Ausflußöffnung erzeugt würde, wenn diese Oeffnungen geschlossen wären. Die fördernden Componenten des aus der Bewegung des Gases erfolgenden Druckes auf das ganze Gefäß kommen daher im Wesentlichen auf die Unterschiede der Bewegungsgrößen des ein- und austretenden Gases parallel zu den drei Coordinatenachsen genommen, oder auf die Werthe:

$$84.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{R}_x = q_1 V_1 (v_0 \cos\alpha_0 - v_1 \cos\alpha_1), \quad \mathfrak{R}_y = q_1 V_1 (v_0 \cos\beta_0 - v_1 \cos\beta_1), \\
&\mathfrak{R}_z = q_1 V_1 (v_0 \cos\gamma_0 - v_1 \cos\gamma_1)
\end{aligned}\right.$$

zurück, worin v_0, α_0, β_0, γ_0 die Größe und Richtungswinkel der Geschwindigkeit des in das Gefäß eintretenden, v_1, α_1, β_1, γ_1 die entsprechenden Größen für die Geschwindigkeit des ausfließenden Gases bezeichnen.

Nach diesem wird man dann leicht einsehen, daß auch die drehenden Componenten des aus der Bewegung des Gases hervorgehenden Druckes auf das ganze Gefäß durch die drehenden Componenten der obengenannten Bewegungsgrößen gegeben sind, daß man also mit der in §. 40 angewendeten Bezeichnung und unter Vernachlässigung der auf die Gastheilchen wirkenden äußeren Kräfte für die drehenden Componenten die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_z &= q_1 V_1 (v_0 p_0' \sin\gamma_0 - v_1 p_1' \sin\gamma_1) \\ \mathfrak{M}_y &= q_1 V_1 (v_0 p_0'' \sin\beta_0 - v_1 p_1'' \sin\beta_1) \\ \mathfrak{M}_x &= q_1 V_1 (v_0 p_0''' \sin\alpha_0 - v_1 p_1''' \sin\alpha_1) \end{aligned}\right\} \quad (95.$$

hat, deren Bedeutung sich nach der von den Gleichungen (79) in §. 40 gegebenen Erklärung leicht aussprechen läßt.

§. 44.

Bisher wurde die Ausflußöffnung als eine stetige Ausbiegung der Gefäßwand und von einer solchen Form vorausgesetzt, daß die zur Ebene der Ausflußöffnung normalen Tangenten an dieser Ausbiegung parallel seien, um darnach annehmen zu können, daß auch die Geschwindigkeiten aller in der Ausflußöffnung befindlichen Flüssigkeitstheilchen parallele Richtungen haben, und daß der Druck in der Richtung der Bewegung für alle dem außerhalb des Gefäßes vorhandenen Drucke gleich sei. Wenn jene Voraussetzung nicht erfüllt ist, so besteht zwar noch für jedes einzelne Flüssigkeitstheilchen in der Ausflußöffnung die Gleichung (74) oder (86); es werden dann aber einerseits die Richtungen der einzelnen Flüssigkeitsfäden nicht mehr parallel, und dann wird auch der Druck in denselben nicht mehr dem äußern Drucke gleich sein. Denn alle Flüssigkeitstheilchen müssen stetig gekrümmte Bahnen beschreiben und können daher erst allmälig in die zur Ebene der Ausflußöffnung normale Richtung umbiegen; die am Rande oder in der Nähe des Randes dieser Oeffnung austretenden Flüssigkeitsfäden werden daher anfangs gegen jene Normale geneigt sein und gegen die mittleren Fäden drücken, wodurch sich der ganze austretende Strahl hinter der

Ausflußöffnung zu einem kleinsten Querschnitt zusammenzieht, und zwar bis zu der Stelle, wo alle Fäden oder Richtungen parallel geworden sind, und der Druck in denselben für alle dem äußern gleich geworden ist. Es ist daher die Bewegung und die Ausflußmenge dieselbe, als wenn die Gefäßwand bis zu jenem kleinsten Querschnitt in stetiger Biegung fortgesetzt wäre; man muß daher auch bei der Berechnung der Ausflußmenge in diesem Falle jenen kleinsten Querschnitt des Strahles als die eigentliche Ausflußöffnung betrachten und darnach auch das Δz in der Gleichung (74) in Bezug auf diese Ausflußöffnung bestimmen. Leider ist es aber bei unsern unvollkommenen Lösungen der allgemeinen Bewegungsgleichungen nicht möglich, diese Erscheinung, welche man die *Contraction des Strahles* nennt, theoretisch darzustellen, also insbesondere die Lage und Fläche des kleinsten Querschnittes zu bestimmen; es kann daher in solchen Fällen, wo die genannte Erscheinung eintritt, nur nach Erfahrungsresultaten empirisch gerechnet werden und die weitere Besprechung derselben gehört der *technischen Hydraulik* an.

Schließlich noch eine kritische Bemerkung. Nach der bisherigen Behandlung der Gleichungen (61) hat man *) für den Ausfluß der tropfenbildenden Flüssigkeiten Formeln abgeleitet, welche die Ausflußgeschwindigkeit in Function der Zeit ausdrücken, selbst in dem Fall, wo das Gefäß bis zu einer bestimmten Höhe gefüllt bleibt, und nach welchen diese Geschwindigkeit zwar in ziemlich kurzer Zeit von dem Augenblick an, wo das Ausfließen beginnt, und vor welchem die Ausflußgeschwindigkeit Null war, dem aus der Gleichung (74) folgenden Werthe sehr nahe kommt, ihn aber erst nach einer unendlichen Zeit oder nie erreicht. Demungeachtet hat man diesen Werth als den von Anfang geltenden angenommen und sich in Betreff der Nothwendigkeit und Richtigkeit jener Formeln wahrscheinlich damit beschwichtigt, daß die Geschwindigkeit der Wassertheilchen nicht in demselben Augenblicke die Werthe: 0 und $\sqrt{2gh}$ haben könne, also eine kleine Zeit zur Erlangung der letztern Geschwindigkeit nothwendig sei. So richtig dieser Satz an und für sich ist, so reicht er doch nicht hin, die Richtigkeit jener Formeln zu beweisen; denn wenn wir auch die Erfahrung, welche durch die Sprungweite eines horizontal austretenden Strahles zeigt, daß die *Geschwindigkeit der zuerst austretenden Flüssigkeitstheilchen größer ist, als die der zunächst nachfolgenden*, nicht gerade als directen Gegenbeweis anführen können, weil hier noch eine

*) Man vergleiche die mehrfach angeführten Werke von Poisson und Duhamel, dann die Résumés von Navier, und deren deutsche Nachbeter.

andere Ursache, die aus den verschiedenen Kräften S an den Gefäßwänden entspringende Verzögerung der Bewegung, mitwirkt, so läßt sich aus derselben doch soviel schließen, daß die Geschwindigkeit der zuerst austretenden Flüssigkeitstheilchen nicht in dem Maße kleiner sein kann, wie es aus jenen Formeln, beziehungsweise derjenigen folgt, welche für den Fall abgeleitet wurde, wo die Ausflußöffnung kleiner ist, als die Spiegelfläche der Flüssigkeit, da nach dieser die Sprungweite des horizontal austretenden Strahles allmälig, wenn auch in kurzer Zeit, von Null an bis zu einer der Geschwindigkeit v_1 entsprechenden wachsen müßte. Diese Formel nimmt nämlich mit unserer Bezeichnung und für ein prismatisches Gefäß, also für ein constantes O, dann für $P_1 = P_0$ die Form an:

$$v'_1 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{O_1^2}{O_0^2}}} \; \frac{e^{t\sqrt{\frac{2g}{h}\left(\frac{O_0^2}{O_1^2} - 1\right)}} - 1}{e^{t\sqrt{\frac{2g}{h}\left(\frac{O_0^2}{O_1^2} - 1\right)}} + 1} .$$

Es nähert sich daher der letzte Factor der rechten Seite allerdings dem Werthe 1 um so schneller, je kleiner h gegen 2g und O_1 gegen O_0 wird; es werden aber die dieser Formel zu Grunde liegenden Voraussetzungen durchaus nicht verletzt, wenn man $h\,O_1^2 = 2g\,(O_0^2 - O_1^2)$ annimmt, und in diesem Falle wird der vorhergehende Ausdruck, wenn man darin den ersten Factor der rechten Seite durch unser v_1 ersetzt, einfach

$$v'_1 = v_1 \frac{e^t - 1}{e^t + 1} ,$$

und gibt für $t = 1''$, $t = 2''$

die Werthe: $v'_1 = \frac{1,72}{3,72} = 0,46 \ldots v_1$, $v'_1 = \frac{6,39}{8,39} v_1 = 0,76 \ldots v_1$.

Nach jener Formel würde demnach bei einer nicht übermäßigen Druckhöhe, so daß man z. B. hätte $h = 18g = 176,4$ Meter, wenn $O_0^2 = 10\,O_1^2$ ist, die Ausflußgeschwindigkeit nach der ersten Sekunde nicht einmal die Hälfte, nach der zweiten erst drei Viertel der wirklichen Ausflußgeschwindigkeit v_1 betragen; es müßte demnach auch die Sprungweite, welche für eine constante Fallhöhe h des Strahles der Geschwin-

digkeit v'_1 proportional ist, nach der ersten Sekunde nur 0,46, nach der zweiten nur 0,76 der ganzen Sprungweite $v_1 \sqrt{\frac{2h}{g}}$ sein!

Man wird sich übrigens von der physikalischen Erscheinung, welche ohne die durch die Gefäßwände verursachte Verzögerung statthaben müßte, leicht Rechenschaft geben, wenn man erwägt,

1) daß sich die Flüssigkeit bei ihrem Austritt aus dem Gefäß in Atome von außerordentlich kleiner Masse auflöst, denen in einer entsprechend kleinen Zeit durch einen constanten Druck eine große Geschwindigkeit ertheilt werden kann,

2) daß die Flüssigkeit in dem Anfangs geschlossenen Gefäß unter dem hydrostatischen Druck comprimirt ist, daß sich beim Oeffnen des Gefäßes die der Oeffnung zunächst liegende Flüssigkeit ausdehnt, daher so lange diese Ausdehnung dauert auf die zuerst austretenden Atome drückt und so deren Bewegung beschleunigt, wie es bei der zweiten Hälfte des Stoßes elastischer Körper der Fall ist,

3) daß aber die kleine Zeit, während welcher diese Beschleunigung erzeugt wird, wegen der sehr kleinen Masse der austretenden Atome noch viel kleiner sein wird, als bei dem Stoß fester Körper, daß also diese Atome während derselben nur einen sehr kleinen Weg zurücklegen konnten und deßhalb sogleich mit der ganzen Geschwindigkeit, welche ihnen während derselben ertheilt worden ist, aus dem Gefäß austreten,

4) daß man für die Berechnung dieser Geschwindigkeit und während jener kleinen Zeit, wie bei dem Stoß, die Wirkung der Schwere vernachlässigen und die Flüssigkeit wie eine elastische betrachten kann, daß demnach während dieser Zeit und für den Druck in der Richtung der Bewegung die aus (66) sich ergebende Gleichung:

$$\frac{1}{q}\,\frac{dP}{ds} + \frac{1}{2}\,\frac{d\,.\,v^2}{ds} = 0$$

angewendet, und darin für q der in §. 6 aufgestellte Werth:

$$q = q_0\left(\alpha + \beta\,\frac{P}{P_0}\right) = q_0\left(1 + \beta\,\frac{P - P_0}{P_0}\right)$$

eingeführt werden kann, daß während jener kleinen Zeit die Geschwindigkeit von 0 bis v'_1 wächst und $P - P_0 = P'$ von (§. 11)

$$P'_0 = \frac{P_0}{\beta}\left(e^{\frac{\beta q_0 g h}{P_0}} - 1\right) \quad \text{bis} \quad P'_1 = 0$$

abnimmt, daß man also hat

$$v'^2_1 = 2\int_0^{P'_0} dP' \,.\, \frac{1}{q_0\left(1+\beta\frac{P'}{P_0}\right)} = 2\frac{\beta q_0}{P_0}\, \mathrm{logn}\, e^{\frac{\beta q_0 g h}{P_0}} = 2gh\,,$$

daß also die Geschwindigkeit der zuerst austretenden Flüssigkeitstheilchen nur $= \sqrt{2gh}$ sein kann, endlich

4) daß sich die durch das Ausfließen entstehende Bewegung erst allmälig, aber auch in ziemlich kurzer Zeit, bis zum Spiegel fortpflanzen wird und daß dadurch die Ausflußgeschwindigkeit in dieser Zeit von $\sqrt{2gh}$ auf $\sqrt{v_0^2 + 2gh}$ wachsen und von dem Augenblick an, wo die Bewegung die Spiegelfläche erreicht und ihre ganze Geschwindigkeit v_0 erlangt hat, constant bleiben muß.

Damit stimmt dann auch die erste unserer Gleichungen (73) für eine unzusammendrückbare Flüssigkeit überein, wenn man dieselbe auf Ausflußöffnung und Spiegelfläche bezieht, und beachtet, daß man im Moment des Oeffnens selbst hat $P^{(0)} = P_0 + qgh$, $v^{(0)} = 0$ und $v_0^{(0)} = 0$, und daß am Ende der oben unter 3) besprochenen sehr kleinen Zeit, also wenn die Bewegung sich noch nicht bis zur Spiegelfläche fortgepflanzt hat, $P = P_0$, $v_0 = 0$ ist, während $x_0^{(0)} = x_0$, u. s. f. bleibt; denn die genannte Gleichung gibt so für die Geschwindigkeit v'_1 der zuerst austretenden Theilchen wie oben $v'^2_1 = 2gh$. Hat dagegen die Bewegung die Spiegelfläche erreicht und daselbst die Geschwindigkeit v_0 erlangt, so wird $v_1^2 = v_0^2 + 2gh$.

Wenn demnach die aus den Kräften S und den Gefäßwänden entspringenden Widerstände nicht vorhanden wären, so würde die Ausflußgeschwindigkeit vom Moment des Oeffnens an in ziemlich kurzer Zeit von $\sqrt{2gh}$ bis $\sqrt{v_0^2 + 2gh}$ wachsen; in Wirklichkeit nimmt dagegen die Geschwindigkeit während einer ebenfalls ziemlich kurzen Zeit ab, und man wird sich auch die Ursache dieser Erscheinung leicht erklären, wenn man beachtet, daß im Augenblick des Oeffnens nur der unmittelbare hydrostatische Druck auf die zuerst austretenden Flüssigkeitstheilchen

wirkt und diese mit der ganzen Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ herausschnellt. So wie sich aber die Bewegung gegen die Spiegelfläche hin fortpflanzt, treten jene Widerstände auf, verzehren einen Theil der von der Schwere erzeugten Wirkung, welcher größer ist, als der in den meisten Fällen sehr kleine Zuwachs aus der Geschwindigkeit v_0, und erzeugen selbst in den günstigsten Fällen eine mehrere Prozente betragende Verminderung unserer theoretischen Ausflußgeschwindigkeit v_1, so daß diese, sobald die Bewegung in der Spiegelfläche ihre ganze Geschwindigkeit erlangt hat, fühlbar unter den anfänglichen Werth: $\sqrt{2gh}$ herabsinkt. Eine weiter gehende Erklärung dieser Erscheinung könnte nur mit Berücksichtigung der aus die Erfahrung geschöpften Kenntnisse über den Einfluß jener Widerstände auf die Bewegung der Flüssigkeiten gegeben werden, was aber die Grenzen einer rationellen Mechanik überschreiten würde.

II. Fließende Bewegung bei äußerer Bewegung.

§. 45.

Wenn die Flüssigkeit, deren innere fließende Bewegung zu untersuchen ist, eine äußere Bewegung besitzt, so wird man jene innere Bewegung auf ein bewegliches Coordinatensystem beziehen, dessen Lage in Bezug auf ein festes Achsensystem durch die Bedingungen der äußern Bewegung gegeben ist, und die allgemeinen Gleichungen für die innere Bewegung eines mit äußerer Bewegung begabten veränderlichen Systems, welche in den §§. 37, 38 und 45 des dritten Buches abgeleitet wurden, werden mit den in §. 32 des gegenwärtigen Buches angegebenen Modificationen auch die Grundlage für die jetzige Untersuchung abgeben.

Nehmen wir demnach zuerst die Untersuchung desjenigen Hauptfalles vor, in welchem die innere Bewegung zweckmäßig auf ein parallel fortschreitendes Coordinatensystem der x', y', z', dessen Anfangspunkt durch die Coordinaten x, y, z in Bezug auf die parallelen festen Achsen bestimmt ist, bezogen werden kann, so zeigen die Gleichungen (70), (71) und (74) des vorhergehenden Buches, daß man für diesen Fall in unsern Gleichungen (61) in §. 32 nur $X - \frac{d^2 x}{dt^2}$, $Y - \frac{d^2 y}{dt^2}$, $Z - \frac{d^2 z}{dt^2}$ für X, Y, Z einzusetzen, und in diesen wie in den Gleichungen (62) und (63) die x, y, z in x', y', z' umzuändern hat. Von den zuletzt genannten Gleichungen werden wir indessen, mit Ausnahme der Bedingung:

$$q = f(P)$$

für die gasförmigen Flüssigkeiten, hier gänzlich Umgang nehmen, da von ihnen doch keine Anwendung gemacht werden kann, und uns nur auf die anwendbaren Folgerungen aus den Gleichungen:

$$96.)\quad \begin{cases} \dfrac{dP}{dx'} + q\,\dfrac{d\,.\,u'_x}{dt} = q\left(X - \dfrac{d^2x}{dt^2}\right)\,, \\[2ex] \dfrac{dP}{dy'} + q\,\dfrac{d\,.\,u'_y}{dt} = q\left(Y - \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)\,, \\[2ex] \dfrac{dP}{dz'} + q\,\dfrac{d\,.\,u'_z}{dt} = q\left(Z - \dfrac{d^2z}{dt^2}\right)\,, \end{cases}$$

welche nach Obigem aus den Gleichungen (61) hervorgehen, beschränken. Diese Folgerungen bestehen in den unsern früheren Gleichungen (68) entsprechenden Beziehungen zwischen der innern Geschwindigkeit und dem Druck in der Richtung der innern Bewegung, welche sich aus diesen Gleichungen (68) ebenso ergeben, wie die (96) aus den Gleichungen (61), oder auf demselben Wege aus den Gl. (96) hervorgehen, wie die (68) aus den ursprünglichen Gl. (61a). Man erhält demnach für die tropfenbildenden und als unzusammendrückbar angenommenen Flüssigkeiten das Gesetz:

$$97^a.)\quad \begin{cases} \Delta P + \frac{1}{2}\Delta . q v'^2 = \displaystyle\int ds'.q\left[\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{dx'}{ds'} + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dy'}{ds'} + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{dz'}{ds'}\right] \\[2ex] \qquad = \displaystyle\int ds'.qR\frac{dr'}{ds'} - \int ds'.q\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx'}{ds'} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy'}{ds'} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz'}{ds'}\right), \end{cases}$$

und mit Beiziehung des Mariotte'schen Gesetzes für die gasförmigen Flüssigkeiten die Beziehung:

$$97^b.)\quad \begin{cases} P\Delta . lg P + \frac{1}{2}\Delta q v'^2 = \displaystyle\int ds'.q\left[\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{dx'}{ds'} + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dy'}{ds'} + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{dz'}{ds'}\right] \\[2ex] \qquad = \displaystyle\int ds'.qR\frac{dr'}{ds'} - \int ds'.q\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx'}{ds'} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy'}{ds'} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz'}{ds'}\right), \end{cases}$$

und schließt daraus zunächst wieder, daß eine äußere geradlinige gleichförmige Bewegung der Flüssigkeit für den innern Zustand derselben mit äußerem ruhendem Gleichgewicht gleichbedeutend ist.

Für homogene Flüssigkeiten nehmen diese Ausdrücke mit der Beachtung, daß die Beschleunigungen $\frac{d^2x}{dt^2}$, u. s. f. von der Veränder-

lichen s' unabhängig sind, die Formen:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\Delta . v'^2 + \frac{1}{q}\Delta P = \int ds' . R\frac{dr'}{ds'} - \frac{d^2x}{dt^2}\Delta x' - \frac{d^2y}{dt^2}\Delta y' - \frac{d^2z}{dt^2}\Delta z' \;, \\ \frac{1}{2}\Delta . v'^2 + \frac{P}{q}\Delta . logn P = \int ds' . R\frac{dr'}{ds'} - \frac{d^2x}{dt^2}\Delta x' - \frac{d^2y}{dt^2}\Delta y' - \frac{d^2z}{dt^2}\Delta z'\end{array}\right\}(98.$$

an, welche zeigen, daß wenn eine äußere Beschleunigung stattfindet, die Geschwindigkeit der Flüssigkeitstheilchen auch von dem Wege abhängt, den diese bei ihrer innern Bewegung im Sinne jener Beschleunigung zurückgelegt haben, daß es also im jetzigen Falle für die Berechnung der Geschwindigkeit im Allgemeinen und insbesondere der Ausflußgeschwindigkeit v'_1 noch viel nothwendiger wäre, die Bahnen der einzelnen Flüssigkeitstheilchen zu kennen, als wenn äußeres Gleichgewicht statthat. Damit verbindet sich dann aber auch die Nothwendigkeit, die Gestalt der Niveauflächen bestimmen zu können, deren Differential-Gleichung nach Gleichung (71) in §. 34 nun die Form:

$$R\frac{dr'}{ds'} - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx'}{ds'} - \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy'}{ds'} - \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz'}{ds'} - v'^2 \varkappa \cos\omega_2 - \frac{1}{2}\frac{d.v'^2}{ds'}\cos\omega_1 = 0$$

annimmt, und nur in solchen Fällen, in welchen $\varkappa$ und $\cos\omega_1$ oder $\frac{d.v'^2}{ds'}$ als Null angenommen werden darf, eine Anwendung zuläßt, indem sie für diese mit der Gleichung (47) in §. 22 identisch wird.

Unter dieser Voraussetzung hat man für die entsprechende Niveaufläche die einfache Gleichung:

$$\int ds' . R\frac{dr'}{ds'} - \frac{d^2x}{dt^2}\Delta x' - \frac{d^2y}{dt^2}\Delta y' - \frac{d^2z}{dt^2}\Delta z' = 0 \;, \quad (99.$$

worin sich das Integral und die Differenzen $\Delta x'$, u. s. f. auf zwei Punkte jener Niveaufläche beziehen. Bezieht man demnach auch die Gleichungen (98) auf einen Punkt dieser Niveaufläche, welche für tropfenbildende Flüssigkeiten die freie Oberfläche sein kann, und auf einen Punkt der Ausflußöffnung, so reduziren sich diejenigen Glieder der rechten Seite jener Gleichungen (98), welche der betreffenden Niveaufläche angehören, auf eine Constante, und es wird demnach der Aus-

druck für die Ausflußgeschwindigkeit v'_1 nur von den Coordinaten der Punkte der Ausflußöffnung abhängig.

In gleichem Maße wie für die Geschwindigkeit und selbst noch mehr wachsen dann auch die Schwierigkeiten für die Bestimmung des innern geometrischen Druckes; dagegen kann der physische Druck auf das ganze Gefäß, das die Flüssigkeit enthält, und dessen Bewegung die äußere Bewegung dieser Flüssigkeit darstellt, auch im jetzigen Falle mittels der in §. 39 angewendeten Betrachtung gefunden werden; denn es läßt sich auf demselben Wege, wie dort beweisen, daß es auch jetzt in jedem Augenblicke in der Flüssigkeit eine Curve geben muß, in welcher die Geschwindigkeit die mittlere ist für den dazu normalen Querschnitt und von solcher Größe, daß durch jeden solchen Querschnitt gleichviel Flüssigkeit fließt und zwar soviel als die augenblickliche Ausflußmenge beträgt, und der Druck, welcher auf diese ganze Curve ausgeübt wird, kann nicht wesentlich von dem Druck auf das ganze Gefäß verschieden sein. Nach der in §§. 39 und 40 gegebenen Ableitung der Werthe für die fördernden Componenten $\mathfrak{N}_x$, $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{N}_z$ und der drehenden Wirkungen $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ wird man leicht erkennen, daß man für unsern jetzigen Fall auch wieder nur $X - \frac{d^2 x}{dt^2}$, u. s. f. für X, u. s. f. zu setzen hat, um die entsprechenden Werthe jener Componenten zu erhalten. Man hat demnach für die fördernden Wirkungen des Gesammtdruckes einer homogenen Flüssigkeit die Ausdrücke:

$$
100.)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{N}_x &= q\int_{s'_0}^{s'_1} ds' \,.\, O'X - qJ\frac{d^2 x}{dt^2} - qV' \mathop{\Delta_{s'}}_{s'_0}^{s'_1} w_x\,, \\
\mathfrak{N}_y &= q\int_{s'_0}^{s'_1} ds' \,.\, O'Y - qJ\frac{d^2 y}{dt^2} - qV' \mathop{\Delta_{s'}}_{s'_0}^{s'_1} w_y\,, \\
\mathfrak{N}_z &= q\int_{s'_0}^{s'_1} ds' \,.\, O'Z - qJ\frac{d^2 z}{dt^2} - qV' \mathop{\Delta_{s'}}_{s'_0}^{s'_1} w_z\,,
\end{aligned}
\right.
$$

und die drehenden Componenten werden mit der in den Gleichungen (78^a) angewendeten Bezeichnung und mit der Beachtung, daß man $\int_{s'_0}^{s'_1} ds' \,.\, O'x' = J\mathfrak{X}'$ u. s. f. hat, wenn $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ die Coordinaten

des Schwerpunktes der in dem Gefäß enthaltenen, in Ruhe gedachten Flüssigkeit in Bezug auf das fortschreitende Achsensystem bezeichnen, durch die Gleichungen:

(101.

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{M}_z &= q\int_{s'_0}^{s'_1} ds'.O'(x'Y-y'X)+qJ\left(\mathfrak{x}'\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}-\mathfrak{y}'\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\right)-qV'\Delta_{s'_0}^{s'_1}(x'w_y-y'w_x),\\
\mathfrak{M}_y &= q\int_{s'_0}^{s'_1} ds'.O'(z'X-x'Z)-qJ\left(\mathfrak{z}'\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}-\mathfrak{x}'\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}\right)-qV'\Delta_{s'_0}^{s'_1}(z'w_x-x'w_z),\\
\mathfrak{M}_x &= q\int_{s'_0}^{s'_1} ds'.O'(y'Z-z'Y)-qJ\left(\mathfrak{y}'\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}-\mathfrak{z}'\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\right)-qV'\Delta_{s'_0}^{s'_1}(y'w_z-z'w_y)
\end{aligned}\right\}$$

gegeben, in welchen V' die augenblickliche oder dauernde Ausflußmenge bedeutet.

Endlich ist noch in Betreff dieser Ausflußmenge V' zu erinnern, daß diese im jetzigen Falle wie die Ausflußgeschwindigkeit v'_1 und die Geschwindigkeit v' überhaupt von den äußern Beschleunigungen abhängt, daß es also für einen ungeändert fortdauernden Zustand nicht genügt, wenn das Gefäß bis zu derselben Höhe gefüllt erhalten wird; es müssen dazu auch die äußeren Beschleunigungen constant, oder es muß die äußere Bewegung eine geradlinige gleichförmig-veränderte sein. Eine constante Ausflußgeschwindigkeit und Ausflußmenge allein könnte allerdings auch bei einer andern äußern Bewegung gedacht werden, wenn man den Zufluß in entsprechender Weise regulirt voraussetzt; solche künstlich zusammengesetzte Fälle dürften übrigens kaum genügendes Interesse bieten, um sich mit ihnen zu befassen, und überhaupt müssen wir uns hinsichtlich der Anwendung der vorhergehenden allgemeinen Formeln auf die einfachsten Fälle beschränken.

§. 46.

Der einfachste Fall dürfte derjenige sein, wenn eine homogene schwere tropfenbildende Flüssigkeit durch eine horizontale Oeffnung aus einem Gefäß ausfließt, das eine verticale gleichförmig-veränderte Bewegung besitzt. Ist α die constante und im Sinne der Schwere als positiv angenommene Beschleunigung dieser Bewegung, so hat man für die

gewöhnliche Richtung der Coordinatenachsen $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2z}{dt^2} = c$, und die Gleichung (99) gibt unter den für sie gemachten Voraussetzungen für die Spiegelfläche die Gleichung:

$$(g - c) \Delta \cdot z'_0 = 0 \quad ,$$

also die einer horizontalen Ebene, und die erste der Gleichungen (98) auf diese Spiegelfläche und die Ausflußöffnung bezogen gibt für die Ausflußgeschwindigkeit den Werth:

$$v'^2_1 - v'^2_0 = 2(g - c)(z'_1 - z'_0) - \frac{2}{q}(P_1 - P_0)$$

oder wenn $P_1 = P_0$ genommen werden darf und mit der Beachtung, daß $z'_1 - z'_0$ für alle Punkte der Ausflußöffnung und Spiegelfläche unveränderlich ist und $= h$ gesetzt werden kann

$$v'_1 = \sqrt{v'^2_0 + 2(g - c)h} \quad .$$

Es wird demnach die Ausflußgeschwindigkeit kleiner als bei ruhendem Gefäß, wenn das Gefäß beschleunigt sinkt, und größer, wenn es steigt, und man hat $v'_1 = v'_0$, wenn $c = g$ ist, das Gefäß also frei niederfällt.

Ist h auch in Bezug auf die Zeit constant, also der Zufluß dem Abfluß gleich, und die Ausflußöffnung so geformt, daß alle Flüssigkeitstheilchen aus ihr parallel austreten, so hat man

$$V' = O_1 v'_1 = O_1 \sqrt{v'^2_0 + 2(g - c)h} = O_0 v'_0$$

und kann daraus wie früher v'_0 eliminiren und bestimmen. Durch Elimination erhält man

$$v'_1 = \sqrt{\frac{2(g-c)h}{1 - \frac{O_1^2}{O_0^2}}} \;, \quad V' = O_1 \sqrt{\frac{2(g-c)h}{1 - \frac{O_1^2}{O_0^2}}} \;,$$

und schließt daraus, daß wenn $c = g$ ist, keine Flüssigkeit aus dem Gefäß austreten kann, indem sowohl v'_1 wie v'_0 Null wird.

Soll diese fallende oder steigende Bewegung in derselben Weise erzeugt werden, wie wir es in §. 23 angenommen haben, und bezeichnen wir das Gewicht des Gefäßes selbst mit G, das der darin enthaltenen Flüssigkeit $g\,q\,J$ mit W, das angehängte Gewicht wieder mit Q, und mit R_z den Druck, welchen die Flüssigkeit auf das Gefäß ausübt, so

haben wir für die Bewegung des Gefäßes und des Gewichtes Q zunächst die Gleichung:

$$\frac{G+Q}{g} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = G + \mathfrak{N}_z - Q \quad . \qquad (a.$$

Nach der dritten der Gleichungen (100) hat man nun aber, wenn die Flüssigkeit nach unten ausfließt,

$$\mathfrak{N}_z = g q J - q J \frac{d^2 z}{dt^2} - q V' (v'_1 - v'_0) \quad ,$$

und wenn man in den vorhergehenden Werthen von v'_1 und V'_1 die Beschleunigung c durch $\frac{d^2 z}{dt^2}$ ersetzt, $O_1 v'^2_1$ für $V' v'_1$ einführt und der Einfachheit wegen v'_0 vernachlässigt, womit natürlich O_1 sehr klein gegen O_0 vorausgesetzt wird, so wird

$$\mathfrak{N}_z = W - \frac{W}{g} \frac{d^2 z}{dt^2} - 2 q O_1 h \left(g - \frac{d^2 z}{dt^2}\right)$$

und damit folgt aus (a):

$$(G + Q + W - 2 g q O_1 h) \frac{d^2 z}{dt^2} = g (G + W - 2 g q O_1 h - Q)$$

und

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = c = g \frac{G + W - 2 g q O_1 h - Q}{G + W - 2 g q O_1 h + Q} \quad .$$

Es ist demnach die Beschleunigung c gleich der eines geschlossenen Gefäßes, welches nur das Gewicht $W - 2 g q O_1 h = g q (J - 2 O_1 h)$ an Flüssigkeit enthält (§. 23), und für die Ausflußgeschwindigkeit ergibt sich damit

$$v'^2_1 = 2 g h \frac{2 Q}{G + W - 2 g q O_1 h + Q} \quad .$$

Für $Q = 0$ muß das Gefäß frei niederfallen, und man findet damit in der That $c = g$, $v'_1 = 0$; für $Q = G + W - 2 g q O_1 h$ wird $c = 0$ und $v'_1 = \sqrt{2 g h}$ als wenn das Gefäß in Ruhe wäre.

Geben wir dagegen dem Gefäß eine horizontal gerichtete constante Beschleunigung c in der Richtung der x-Achse, so haben wir $\frac{d^2 x}{dt^2} = c$

$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} = 0$, und die Gleichung der Spiegelfläche wird nach (99) und wie in §. 23

$$g \Delta z'_0 - c \Delta x'_0 = 0 \quad ,$$

also die Gleichung einer auf der $x' z'$-Ebene senkrechten Ebene. Legen wir dann den Anfang der $x' y' z'$ in die Spiegelfläche, indem wir dieselbe auf einer constanten Höhe erhalten voraussetzen, so haben wir $g z'_0 - c x'_0 = 0$, und die erste der Gleichungen (98) gibt für $\Delta P = 0$

$$v'^2_1 = v'^2_0 + 2 g z'_1 - 2 c x'_1 \quad .$$

Ist nun die Ausflußöffnung wie vorher horizontal, so ist z'_1 für alle Punkte derselben constant, aber x'_1 und folglich auch v'_1 veränderlich und wir haben

$$\frac{dV'}{dx'_1} = v'_1 \frac{dO_1}{dx'_1} = v'_1 (y'_1 - y'_0) \quad ,$$

wenn die Begrenzung der Ausflußöffnung durch eine Gleichung: $f(x'_1, y') = 0$ gegeben ist, aus welcher für denselben Werth von x'_1 die beiden Werthe y'_1 und y'_0 für y' folgen, und darnach wird unter Vernachlässigung des v'_0

$$\text{b.)} \qquad V' = \int_{a_0}^{a_1} dx'_1 . (y'_1 - y'_0) \sqrt{2 g z'_1 - 2 c x'_1} \quad ;$$

es berechnet sich demnach in diesem Falle die Ausflußmenge durch eine horizontale Oeffnung in ähnlicher Weise, wie die aus einer verticalen Ausflußöffnung in einem ruhenden Gefäß. Man hat z. B. für eine rechteckige Oeffnung, dessen eine Seite b parallel zur y-Achse ist, und wenn man die z'-Achse durch die Mitte dieser Oeffnung gehen läßt und dann $z'_1 = h$, $a_1 = +\frac{1}{2} a$, $a_0 = -\frac{1}{2} a$, $\frac{c}{g} = \beta$ setzt

$$V' = b \sqrt{2g} \int_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a} dx'_1 . \sqrt{h - \beta x'_1} = \frac{b}{\beta} \sqrt{2g} \int_{h - \frac{1}{2}\beta a}^{h + \frac{1}{2}\beta a} du . \sqrt{u}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{b}{\beta} \sqrt{2g} \left[\sqrt{(h + \tfrac{1}{2}\beta a)^3} - \sqrt{(h - \tfrac{1}{2}\beta a)^3} \right] .$$

Ist dagegen die Ebene der Ausflußöffnung vertical und senkrecht zur x=Achse oder zur Richtung der Bewegung, so kann man den Anfangspunkt der x' z' in die Ebene der Ausflußöffnung legen; es werden dann alle $x'_1 = 0$ und man hat wie früher

$$\frac{dV'}{dz'_1} = v'_1 \frac{dO_1}{dz'_1} = (y'_1 - y'_0)\sqrt{2gz'_1}$$

und

$$V' = \int_{h_0}^{h_1} dz'_1 \, . \, (y'_1 - y'_0)\sqrt{2gz'_1} = \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} d\zeta_1 \, . \, (\eta_1 - \eta_0)\sqrt{2g(h+\zeta)} \; .$$

Die Ausflußmenge ist demnach in diesem Falle dieselbe, als wenn das Gefäß in Ruhe oder in gleichförmiger geradliniger Bewegung begriffen wäre und die Ebene der Ausflußöffnung von der horizontalen Spiegelfläche nach derselben Geraden geschnitten würde, wie von der jetzigen geneigten Spiegelfläche. Bei dieser horizontalen Beschleunigung besteht daher ein wesentlicher Unterschied, je nachdem der Ausfluß in demselben oder in entgegengesetztem Sinne der äußern Bewegung stattfindet; denn es wird im zweiten Falle bei gleicher Gestalt der Ausflußöffnung und bei gleicher Höhe derselben über einer horizontalen Ebene viel mehr ausfließen, als im ersten.

Lassen wir auch die horizontale Beschleunigung dadurch entstehen, daß wir an das Gefäß ein Gewicht Q mittels eines über eine Rolle gehenden Fadens befestigen und dasselbe vertical sinken lassen, so haben wir nun für die Bewegung dieses Systems, wenn wir dabei zugleich auf die Reibung an der horizontalen Bahn des Gefäßes Rücksicht nehmen, die Gleichung:

$$\frac{Q+G}{g}\,\frac{d^2x}{dt^2} = Q + \mathfrak{R}_x - f\,(G + \mathfrak{R}_z) \qquad (c.$$

und es ist nach (100)

$$\mathfrak{R}_x = -\,qJ\,\frac{d^2x}{dt^2} - qV'w_1 \;, \quad \mathfrak{R}_z = gqJ = W$$

wenn $w_1 = \frac{V'}{O_1}$ die im Sinne der Bewegung positiv genommene mittlere Ausflußgeschwindigkeit bezeichnet. Damit wird dann die Gleichung (c)

$$(Q + G + W) \frac{d^2 x}{dt^2} = g \left[Q - q V' w_1 - f (G + W) \right]$$

und es ergibt sich als Beschleunigung der äußern Bewegung.

$$c = g \frac{Q - q V' w_1 - f (G + W)}{Q + G + W} .$$

Für $Q = 0$ muß demnach c immer dem w_1 dem Sinne nach entgegengesetzt sein und den Werth:

$$c = g \frac{q V' w_1 - f (G + W)}{G + W}$$

erhalten, und es muß Q größer sein, als $q V' w_1 + f (G + W)$, wenn c im demselben Sinne wie w_1 gerichtet sein soll.

Wenn wie vorher die Beschleunigung der äußern Bewegung horizontal gerichtet ist, die Ausflußöffnung aber eine beliebige Lage hat, so wird man immer die x- und die x'-Achse mit der Richtung jener Beschleunigung zusammenfallen lassen und hat dann wie oben

$$v_1'^2 = v_0'^2 + 2 g z_1 - 2 c x_1 ;$$

zur Berechnung von V' muß man aber von der Beziehung:

$$\frac{d^2 V'}{dx_1 \, dz_1} = v'_1 \frac{d^2 O_1}{dx_1 \, dz_1} = v'_1 \sec \mu ,$$

wenn μ den Winkel zwischen der Normale zur Ausflußöffnung und der y-Achse bezeichnet, ausgehen und in dem daraus sich ergebenden Integral:

$$V' = \sec \mu \int_{a_0}^{a_1} dx_1 \int_{f_2(x_1)}^{f_1(x_1)} dz_1 \, . \sqrt{v_0'^2 + 2 g z_1 - 2 c x_1}$$

die Grenzen von x_1 und z_1 für die Projection der Ausflußöffnung in der xz-Ebene bestimmen. Man kann aber auch wie früher in der Ebene der Ausflußöffnung ein Achsenpaar der ξ und ζ annehmen, dessen Anfangspunkt in einer Entfernung h vertical unter dem in der Spiegelfläche liegenden Anfang der $x' z'$ liegt und dessen ξ-Achse horizontal ist; sind dann ν und ε die Winkel der Normale zur Ebene der Oeffnung mit der z-Achse und ihrer Projection in der xy-Ebene mit der x-Achse, so hat man $z_1 = h + \zeta \sin \nu$, $x_1 = \xi \sin \varepsilon - \zeta \cos \nu \cos \varepsilon$, und

$$v_1'^2 = v_0'^2 + 2 g (h + \zeta \sin \nu) - 2 c (\xi \sin \varepsilon - \zeta \cos \nu \cos \varepsilon) ;$$

es ist dann aber auch $\frac{d^2 O_1}{d\xi\, d\zeta} = 1$, also $\frac{d^2 V'}{d\xi\, d\zeta} = v'_1 \frac{d^2 O_1}{d\xi\, d\zeta} = v'_1$, folglich

$$V' = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\xi \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} d\zeta \,.\, \sqrt{v'^2_0 + 2g(h + \zeta \sin \nu) - 2c(\xi \sin \varepsilon - \zeta \cos \nu \cos \varepsilon)} \,,$$

und es sind nun die Grenzen von ζ und ξ durch die Begrenzung der Ausflußöffnung in ihrer Ebene selbst zu bestimmen, dabei aber auch zu beachten, daß die ζ, abwärts positiv genommen werden müssen. Wenn die Ausflußöffnung horizontal wird, so hat man $\sin \nu = 0$, $\cos \nu = 1$, aber ε bleibt unbestimmt; man kann daher entweder $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ nehmen, und hat dann

$$V' = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\xi \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} d\zeta \,.\, \sqrt{v'^2_0 + 2gh - 2c\xi}$$

was mit dem obigen Werthe (b) übereinstimmt, indem hier die ζ die dortigen y' vertreten und $z'_1 = h$ ist, oder man kann $\varepsilon = 0$ nehmen, wodurch sich

$$V' = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\zeta \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi \,.\, \sqrt{v'^2_0 + 2gh + 2c\zeta}$$

ergibt, was mit Berücksichtigung des Sinnes der positiven ζ auf das vorhergehende zurückkommt.

§. 47.

Beziehen wir nun die innere Bewegung einer Flüssigkeit auf ein sich drehendes Coordinatensystem, und zwar auf ein solches, dessen eine Achse fest ist, so werden wir aus den Gleichungen (100) in §. 45 des dritten Buches folgende Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dP}{d\xi} + q\,\frac{d\,.\,u_\xi}{dt} &= q\left(\Xi + \eta\,\frac{d\varphi}{dt} + \xi\varphi^2 + 2\varphi\,\frac{d\eta}{dt}\right)\\
\frac{dP}{d\eta} + q\,\frac{d\,.\,u_\eta}{dt} &= q\left(H - \xi\,\frac{d\varphi}{dt} + \eta\varphi^2 - 2\varphi\,\frac{d\xi}{dt}\right)\\
\frac{dP}{d\zeta} + q\,\frac{d\,.\,u_\zeta}{dt} &= q\,Z\,,
\end{aligned}\right\} \quad (102.$$

welche die ζ-Achse als feste Achse voraussetzen, und in denen $\mathfrak{u}_\xi$, $\mathfrak{u}_\eta$, $\mathfrak{u}_\zeta$ die Componenten der innern Geschwindigkeit eines Flüssigkeitstheilchens am Orte $\xi\,\eta\,\zeta$, und Ξ, H, Z die Componenten der äußern Kraft an diesem flüssigen Atom parallel zu den sich drehenden Achsen genommen bezeichnen und φ die augenblickliche äußere Winkelgeschwindigkeit ist.

Man zieht daraus zunächst für eine homogene unzusammendrückbare Flüssigkeit in der frühern Weise, indem man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{d\xi}{ds}$, $\frac{d\eta}{ds}$, $\frac{d\zeta}{ds}$ multiplizirt und die Producte summirt, und unter der Voraussetzung, daß man hat

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{\mathfrak{u}_\xi}{\sqrt{\mathfrak{u}_\xi^2 + \mathfrak{u}_\eta^2 + \mathfrak{u}_\zeta^2}} = \frac{\mathfrak{u}_\xi}{\mathfrak{v}}, \quad \frac{d\eta}{ds} = \frac{\mathfrak{u}_\eta}{\mathfrak{v}}, \quad \frac{d\zeta}{ds} = \frac{\mathfrak{u}_\zeta}{\mathfrak{v}},$$

daß man also in der Richtung der wirklichen Bewegung von dem Punkte $\xi\,\eta\,\zeta$ aus fortgeht, die neue Gleichung:

$$\frac{1}{q}\frac{dP}{ds} + \frac{1}{2}\frac{d.\mathfrak{v}^2}{ds} = \Xi\frac{d\xi}{ds} + H\frac{d\eta}{ds} + Z\frac{d\zeta}{ds}$$
$$+ \varphi^2\left(\xi\frac{d\xi}{ds} + \eta\frac{d\eta}{ds}\right) + \frac{d\varphi}{dt}\left(\eta\frac{d\xi}{ds} - \xi\frac{d\eta}{ds}\right),$$

aus welcher sich durch Integration wieder die Beziehung zwischen der Geschwindigkeit, dem Druck und der äußern Kraft in der Richtung der Bewegung, und den aus der Drehung entspringenden innern Kräften ergibt, nämlich

$$\frac{1}{q}\Delta P + \frac{1}{2}\Delta.\mathfrak{v}^2 = \int ds.\left(\Xi\frac{d\xi}{ds} + H\frac{d\eta}{ds} + Z\frac{d\zeta}{ds}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\varphi^2\Delta(\xi^2+\eta^2) + \frac{d\varphi}{dt}\int ds.\left(\eta\frac{d\xi}{ds} - \xi\frac{d\eta}{ds}\right).$$

Setzt man darin noch $\xi = \mathfrak{r}\cos\omega$, $\eta = \mathfrak{r}\sin\omega$, drückt also die Lage eines flüssigen Atoms durch Polarcoordinaten aus, und ersetzt die tangentiale Componente $\Xi\frac{d\xi}{ds} + H\frac{d\eta}{ds} + Z\frac{d\zeta}{ds}$ der äußern Kraft wieder durch $R\frac{dr}{ds}$, so erhält man der Form nach einfacher

$$\frac{1}{q}\Delta P + \frac{1}{2}\Delta . \mathfrak{v}^2 = \int ds . R\frac{dr}{ds} + \frac{1}{2}\varphi^2 \Delta \mathfrak{r}^2 - \frac{d\varphi}{dt}\int ds . \mathfrak{r}^2 \frac{d\omega}{ds} \quad . (103.$$

Das letzte Glied dieser Gleichung zeigt sogleich, daß für eine veränderliche drehende Bewegung des Gefäßes, worin die Flüssigkeit enthalten ist, die Gleichung der Bahnen der einzelnen Flüssigkeitstheilchen in der Form: $\mathfrak{r} = f(\omega)$ bekannt sein müßte, wenn die Aenderung der Geschwindigkeit für zwei Punkte derselben bestimmt werden soll; daß dagegen, wenn die äußere drehende Bewegung eine gleichförmige, also $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ ist, zufolge des vorletzten Gliedes nur der Abstand $\mathfrak{r}$ eines Atoms von der Drehungsachse in den beiden Lagen, für welche seine Geschwindigkeiten verglichen werden sollen, in Rechnung kommt, also die Aenderung der Geschwindigkeit von einem Punkte bis zu einem andern von der Form der dazwischenliegenden Bahn unabhängig ist.

Es kann übrigens die Gleichung (103) zur Bestimmung von $\Delta . \mathfrak{v}^2$ wieder nur auf zwei Punkte angewendet werden, für welche ΔP bekannt ist, und der entsprechende Werth von $\Delta . \mathfrak{v}^2$ ist dann für je zwei Punkte in zwei Flächen genommen gültig, in denen P constant ist. Die Differential-Gleichung einer solchen Niveaufläche hat nun die Form:

$$R\frac{dr}{ds} + \frac{1}{2}\varphi^2\frac{d.\mathfrak{r}^2}{ds} - \frac{d\varphi}{dt}\mathfrak{r}^2\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{2}\frac{d.\mathfrak{v}^2}{ds}\cos\psi_1 - \mathfrak{v}^2\varkappa\cos\psi_2 = 0 \,, \quad (104^a.$$

worin ψ_1 und ψ_2 bezüglich der relativen Bahnen der Flüssigkeitstheilchen dieselbe Bedeutung haben, wie die Winkel ω_1 und ω_2 der Gleichung (71) in Bezug auf die absolute Bewegung derselben, und welche für besondere Formen des Gefäßes und einzelne Niveauflächen, in denen $\mathfrak{v}$ und P zugleich constant sind und $\varkappa$ oder $\cos\psi_2$ Null ist, auf die einfachere mit der Gleichung (51) in §. 24 übereinstimmende:

$$\Xi\frac{d\xi}{ds} + H\frac{d\eta}{ds} + Z\frac{d\zeta}{ds} + \frac{1}{2}\varphi^2\frac{d.\mathfrak{r}^2}{ds} + \mathfrak{r}^2\frac{d\omega}{ds}\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad (104^b.$$

zurückkommt.

Der Druck, welchen die Flüssigkeit durch ihre Bewegung und die äußern Kräfte auf das ganze Gefäß ausübt, kann auch in jetzigem Falle durch die in §. 39 angewendete Betrachtung gefunden werden,

und man erhält darnach für die fördernden Componenten dieses Druckes parallel zu den Achsen der ξ, η, ζ die Werthe:

$$105^a.)\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{R}_\xi &= q\int_{s_0}^{s_1} ds\,.\,O''\left(\Xi + \eta_,\frac{d\varphi}{dt} + \xi_,\varphi^2 + 2\varphi\frac{d\eta_,}{dt}\right) - qV''\overset{s_1}{\underset{s_0}{\Delta_s}} w_\xi\,,\\
\mathfrak{R}_\eta &= q\int_{s_0}^{s_1} ds\,.\,O''\left(H - \xi_,\frac{d\varphi}{dt} + \eta_,\varphi^2 - 2\varphi\frac{d\xi_,}{dt}\right) - qV''\overset{s_1}{\underset{s_0}{\Delta_s}} w_\eta\,,\\
\mathfrak{R}_\zeta &= q\int_{s_0}^{s_1} ds\,.\,O''Z - qV''\overset{s_1}{\underset{s_0}{\Delta_s}} w_\zeta\,,
\end{aligned}\right.$$

worin O'' die Fläche eines Querschnittes des Gefäßes, welcher zur Curve der mittleren Geschwindigkeit normal ist, bezeichnet, $\xi_,$ und $\eta_,$ einem Punkte dieser Curve angehören und V'' die augenblickliche Ausflußmenge bei der jetzigen relativen Bewegung ist. Beachtet man dann, daß

$$\frac{d\eta_,}{dt} = w_\eta = w\frac{d\eta_,}{ds}\,,\quad \frac{d\xi_,}{dt} = w_\xi = w\frac{d\xi_,}{ds}\,,\quad O''w = V''$$

und daß man

$$\int_{s_0}^{s_1} ds\,.\,O''\xi_, = J\hat{\xi}\,,\qquad \int_{s_0}^{s_1} ds\,.\,O''\eta_, = J\hat{\eta}$$

setzen kann, wenn $\hat{\xi}$ und $\hat{\eta}$ die Coordinaten des Schwerpunktes der in dem Gefäße enthaltenen Flüssigkeit bezeichnen, so kann man den vorhergehenden Werthen von $\mathfrak{R}_\xi$, u. s. f. auch die Formen geben:

$$105^b.)\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{R}_\xi &= q\int_{s_0}^{s_1} ds\,.\,O''\Xi + q\varphi^2 J\hat{\xi} + qJ\hat{\eta}\frac{d\varphi}{dt} - qV''\overset{s_1}{\underset{s_0}{\Delta_s}}.(w_\xi - 2\varphi\eta_,)\,,\\
\mathfrak{R}_\eta &= q\int_{s_0}^{s_1} ds\,.\,O''H + q\varphi^2 J\hat{\eta} - qJ\hat{\xi}\frac{d\varphi}{dt} - qV''\overset{s_1}{\underset{s_0}{\Delta_s}}.(w_\eta + 2\varphi\xi_,)\\
\mathfrak{R}_\zeta &= q\int_{s_0}^{s_1} ds\,.\,O''Z - qV''\overset{s_1}{\underset{s_0}{\Delta_s}}\,.\,w_\zeta
\end{aligned}\right.$$

Diese Ausdrücke finden indessen nur Anwendung, wenn es sich darum handelt, den fördernden Druck auf die feste Drehungsachse oder den von dieser zu leistenden Widerstand zu berechnen. In unserm jetzigen Falle sind deßhalb die drehenden Wirkungen des von der Flüssigkeit erzeugten Druckes die wichtigeren, und unter diesen insbesondere die drehende Wirkung $\mathfrak{M}_\zeta$ um die feste Achse, da auch die beiden andern $\mathfrak{M}_\xi$ und $\mathfrak{M}_\eta$ durch den Widerstand dieser Achse aufgehoben werden und nur bei der Untersuchung dieses Widerstandes in Betracht kommen.

Für diese drehenden Componenten zieht man aus den Gleichungen (105ᵃ) die Werthe:

(106.

$$
\left.
\begin{aligned}
\mathfrak{M}_\zeta &= \int_{s_0}^{s_1} ds \,.\left(\xi_{,} \frac{d\mathfrak{N}_\eta}{ds} - \eta_{,} \frac{d\mathfrak{N}_\xi}{ds}\right) = q \int_{s_0}^{s_1} ds \,.\, O'' \left(\xi_{,} H - \eta_{,} \Xi\right) \\
&\quad - q \frac{d\varphi}{dt} \int_{s_0}^{s_1} ds \,.\, O'' \left(\xi_{,}^2 + \eta_{,}^2\right) - q V'' \overset{s_1}{\underset{s_0}{\Delta}}{}_s \left[\varphi\left(\xi_{,}^2 + \eta_{,}^2\right) + \xi_{,} w_\eta - \eta_{,} w_\xi\right], \\
\mathfrak{M}_\eta &= q \int_{s_0}^{s_1} ds \,.\, O'' \left(\zeta_{,} \Xi - \xi_{,} Z\right) + q \frac{d\varphi}{dt} \int_{s_0}^{s_1} ds \,.\, O'' \eta_{,} \zeta_{,} + q\varphi^2 \int_{s_0}^{s_1} ds \,.\, O'' \xi_{,} \zeta_{,} \\
&\quad + 2\varphi q V' \int_{s_0}^{s_1} ds \,.\, \zeta_{,} \frac{d\eta_{,}}{ds} - q V'' \overset{s_1}{\underset{s_0}{\Delta}}{}_s \left(\zeta_{,} w_\xi - \xi_{,} w_\zeta\right), \\
\mathfrak{M}_\xi &= q \int_{s_0}^{s_1} ds \,.\, O'' \left(\eta_{,} Z - \zeta_{,} H\right) - q \frac{d\varphi}{dt} \int_{s_0}^{s_1} ds \,.\, O'' \xi_{,} \zeta_{,} + q\varphi^2 \int_{s_0}^{s_1} ds \,.\, O'' \eta_{,} \zeta_{,} \\
&\quad - 2\varphi q V'' \int_{s_0}^{s_1} ds \,.\, \zeta_{,} \frac{d\xi_{,}}{ds} - q V'' \overset{s_1}{\underset{s_0}{\Delta}}{}_s \left(\eta_{,} w_\zeta - \zeta_{,} w_\eta\right),
\end{aligned}
\right\}
$$

und wird sich hinsichtlich der Bedeutung der einzelnen Glieder dieser Werthe (außer dem ersten und letzten, deren Bedeutung dieselbe ist, wie bei den Momenten $\mathfrak{M}_x$ u. s. f. in Bezug auf feste Coordinaten-Achsen) leicht überzeugen, daß die Integrale:

$$
q \int_{s_0}^{s_1} ds \,.\, O'' \left(\xi_{,}^2 + \eta_{,}^2\right) \;,\quad q \int_{s_0}^{s_1} ds \,.\, O'' \xi_{,} \zeta_{,} \;,\quad q \int_{s_0}^{s_1} ds \,.\, O'' \eta_{,} \zeta_{,}
$$

mit den Summen:

$$\Sigma \,.\, m\,(\xi^2 + \eta^2) \quad , \quad \Sigma \,.\, m\,\xi\,\zeta \quad , \quad \Sigma \,.\, m\,\eta\,\zeta$$

für nicht stetige Systeme übereinstimmen, daß also das erste jener Integrale das Massemoment der in dem Gefäß enthaltenen Flüssigkeit in Bezug auf die ζ=Achse ausdrückt, und man wird aus der Bedeutung der andern schließen, daß wenn die Drehungsachse eine Hauptachse für irgend einen ihrer Punkte ist, alle mit diesen Integralen behafteten Glieder in $\mathfrak{M}_\eta$ und $\mathfrak{M}_\xi$ Null werden. Außerdem enthält aber der Werth von $\mathfrak{M}_\zeta$ das Glied: $\varphi\, q\, V'' \overset{s_1}{\underset{s_0}{\Delta_s}} \,.\, (\xi_{,}^2 + \eta_{,}^2)$ $= \varphi\, q\, V''\, (r_1^2 - r_0^2)$, wenn r_0 den Abstand des Anfangspunktes der Curve der mittleren Geschwindigkeit und r_1 den Abstand ihres Endpunktes von der ζ=Achse bezeichnet, und darin drücken die letzten Factoren $q\, V''\, (r_1^2 - r_0^2)$ offenbar den Unterschied der Massemomente der aus- und eintretenden Flüssigkeitsmenge V'' aus; das Product $\varphi\, q\, V''\, (r_1^2 - r_0^2)$ ist demnach der Unterschied der äußeren Bewegungsgrößen derselben Flüssigkeitsmenge V'' beim Ausfluß und beim Eintritt, und das ganz letzte Glied des Werthes $\mathfrak{M}_\zeta$, worin der letzte Theil: $q\, V''\, \Delta \,.\, (\xi_{,} w_\eta - \eta_{,} w_\xi)$ den Unterschied der innern Bewegungsgrößen der ein- und austretenden Flüssigkeitsmenge bedeutet, drückt demnach den Unterschied der totalen absoluten Bewegungsgrößen derselben Flüssigkeitsmasse $q\, V''$ in Bezug auf feste Achsen aus.

Alle bisher genannten Glieder in den Werthen von $\mathfrak{M}_\zeta$, $\mathfrak{M}_\eta$, $\mathfrak{M}_\xi$ können nach ihrer Bedeutung berechnet werden, ohne daß man die Gestalt der Curve der mittleren Geschwindigkeit kennt; die beiden letzten Momente enthalten aber noch Glieder von der Form:

$$2\,\varphi\, q\, V'' \int_{s_0}^{s_1} ds \,.\, \zeta_{,} \frac{d\eta_{,}}{ds} \quad , \quad 2\,\varphi\, q\, V'' \int_{s_0}^{s_1} ds \,.\, \zeta_{,} \frac{d\xi_{,}}{ds} \quad ,$$

und diese können ohne jene Kenntniß nicht integrirt werden; es können daher diese drehenden Wirkungen nur in solchen Fällen vollständig berechnet werden, in welchen sich die Gestalt jener Curve, oder die Beziehungen zwischen $\xi_{,}$, $\eta_{,}$ und $\zeta_{,}$ für dieselbe mit genügender Sicherheit muthmaßen lassen.

§. 43.

Als erste Anwendung des Vorhergehenden wollen wir eine schwere tropfenbildende Flüssigkeit betrachten in einem Gefäß, das sich gleichförmig um eine verticale Achse dreht, welches durch entsprechenden Zufluß bis zu einer constanten Höhe gefüllt erhalten wird und eine solche Gestalt hat, daß die Bedingungen für die Gleichung (104^b) der Niveauflächen mit hinreichender Annäherung erfüllt werden. Wir haben dann $\Xi = H = 0$, $Z = g$; $\frac{d\varphi}{dt} = 0$; und die Gleichung der Spiegelfläche nimmt wie in §. 25, nur mit dem Unterschied, daß die ζ abwärts positiv genommen werden, die Form an:

$$2g\,\Delta\zeta_0 + \varphi^2\,\Delta\mathfrak{r}_0^2 = 0 \quad . \qquad (\alpha.$$

Nehmen wir dann den Anfang der ζ in der Spiegelfläche, also den Durchschnitt der festen Achse mit der Spiegelfläche als Anfang der ξ, η, ζ und $\mathfrak{r}$ an und setzen den Druck P in dieser und der Ausflußöffnung als gleich voraus, so haben wir in einem Punkt der letztern, welcher in der verticalen Entfernung ζ_1 von jenem Anfangspunkt und in der Entfernung $\mathfrak{r}_1$ von der Achse liegt, nach (103) für die Ausflußgeschwindigkeit den Werth

$$\mathfrak{v}_1^2 - \mathfrak{v}_0^2 = 2g(\zeta_1 - \zeta_0) + \varphi^2(\mathfrak{r}_1^2 - \mathfrak{r}_0^2) \ ,$$

worin ζ_0 und $\mathfrak{r}_0$ die Coordinaten des Anfanges der Bahn des in dem Punkte $\zeta_1\,\mathfrak{r}_1$ austretenden Flüssigkeitstheilchens sind. Da nun zufolge der eben bestimmten Lage des Coordinatenanfangs und der Gleichung (α) für alle Punkte der Spiegelfläche

$$2g\,\zeta_0 + \varphi^2\,\mathfrak{r}_0^2 = 0$$

ist, so wird darnach einfach

$$\mathfrak{v}_1 = \sqrt{\mathfrak{v}_0^2 + 2g\,\zeta_1 + \varphi^2\,\mathfrak{r}_1^2} \ .$$

Ist nun weiter die Ausflußöffnung horizontal, so wird ζ_1 constant und $= h$, und man hat für die augenblickliche Ausflußmenge V''

$$\frac{d^2 V''}{d\mathfrak{r}_1\,d\omega_1} = \mathfrak{v}_1\,\frac{d^2 O_1}{d\mathfrak{r}_1\,d\omega_1} = \mathfrak{v}_1\,\mathfrak{r}_1 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 V''}{d\xi_1\,d\eta_1} = \mathfrak{v}_1$$

je nachdem sich die Begrenzung der Ausflußöffnung O_1 einfacher in

Polarcoordinaten oder in rechtwinklichen ausdrücken läßt. Geben wir z. B. der Ausflußöffnung die Gestalt eines Ring=Sectors und bezeichnen die Halbmesser der begrenzenden Bogen mit r_1 und r_2, den Centriwinkel mit α, so haben wir

$$V'' = \int_0^\alpha d\omega_1 \int_{r_1}^{r_2} d\mathfrak{r}_1 \,.\, \mathfrak{r}_1 \sqrt{\mathfrak{v}_0^2 + 2gh + \varphi^2 \mathfrak{r}_1^2}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\alpha}{\varphi^2} \left[\sqrt{(\mathfrak{v}_0^2 + 2gh_0 + \varphi^2 r_2^2)^3} - \sqrt{(\mathfrak{v}_0^2 + 2gh_0 + \varphi^2 r_1^2)^3} \right] .$$

Wenn demnach $\varphi^2 r_2^2$ ziemlich klein ist gegen $\mathfrak{v}_0^2 + 2gh_0 = v'^2_1$, so kann man schreiben

$$V'' = \frac{1}{3} \frac{\alpha}{\varphi^2} \sqrt{(\mathfrak{v}_0^2 + 2gh_0)^3} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{\varphi^2 r_2^2}{v'^2_1}\right)^3} - \sqrt{\left(1 + \frac{\varphi^2 r_1^2}{v'^2_1}\right)^3} \right]$$

$$= \frac{1}{2} v'_1 \alpha (r_2^2 - r_1^2) + \frac{1}{8} \frac{\varphi^2}{v'_1} \alpha (r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 + r_1^2)$$

$$= O_1 v'_1 \left[1 + \frac{1}{4} \frac{\varphi^2 (r_2^2 + r_1^2)}{v_1^2} \right] .$$

Will man dagegen die Ausflußmenge V″ mit der V aus unbewegtem Gefäß vergleichen, so hat man zuerst zu beachten, daß im letztern Falle die Druckhöhe h constant und größer als h_0 ist, und wird aus den in §. 25 gefundenen Werthen schließen, daß man hat

$$h = h_0 + \frac{\varphi^2 R^2}{4g} ,$$

wobei vorausgesetzt wird, daß das Gefäß cylindrisch, und sein Halbmesser $= R$ ist. Daraus folgt

$$2gh_0 = 2gh - \frac{1}{2} \varphi^2 R^2 = 2gh - \varphi^2 r'^2_0 ,$$

$$V'' = \frac{\alpha}{3\varphi^2} \left[\sqrt{[\mathfrak{v}_0^2 + 2gh + \varphi^2 (r_2^2 - r_0^2)]^3} - \sqrt{[\mathfrak{v}_0^2 + 2gh + \varphi^2 (r_1^2 - r_0^2)]^3} \right]$$

also angenähert und $\mathfrak{v}_0^2 + 2gh = v_1^2$ gesetzt,

$$V'' = \frac{1}{2} v_1 \alpha (r_2^2 - r_1^2) + \frac{1}{8} \frac{\varphi^2}{v_1} \alpha (r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 + r_1^2 - 2 r_0^2)$$

$$= O_1 v_1 \left[1 + \frac{1}{4} \frac{\varphi^2 (r_2^2 + r_1^2 - 2 r_0^2)}{v_1^2} \right].$$

Die Ausflußmenge aus dem sich drehenden Gefäß ist also der aus unbewegtem Gefäß gleich, wenn $r_2^2 + r_1^2 = 2 r_0^2 = R^2$; sie ist größer, wenn die Oeffnung mehr über den Kreis des Gleichgewichts-Druckes vom Halbmesser r_0 hinausliegt, und kleiner, wenn sie der Achse näher liegt. Ist z. B. $r_2 = R$, reicht also die Oeffnung bis zur cylindrischen Wand des Gefäßes, so ist die Ausflußmenge in der Zeiteinheit

$$V'' = O_1 v_1 \left(1 + \frac{\varphi^2 r_1^2}{4 v_1^2} \right),$$

also jedenfalls größer als $O_1 v_1$, wenn r_1 nicht $= 0$ ist, aber auch nicht viel davon verschieden, wenn sich die Oeffnung nahe bis zur Achse erstreckt.

Wenn die Ebene der Ausflußöffnung vertical ist, so wird man die ξ-Achse senkrecht zu dieser Ebene annehmen, r_1^2 durch $\xi_1^2 + \eta_1^2$ ersetzen, und zur Berechnung von V'' von der Beziehung:

$$\frac{d^2 V''}{d\eta_1\, d\zeta_1} = \mathfrak{v}_1 \frac{d^2 O_1}{d\eta_1\, d\zeta_1} = \mathfrak{v}_1 = \sqrt{\mathfrak{v}_0^2 + 2 g \zeta_1 + \varphi^2 (\xi_1^2 + \eta_1^2)}$$

ausgehen, in welcher ξ_1 einen constanten Werth R hat. Für eine rechteckige Oeffnung z. B. mit verticalen und horizontalen Seiten von denen die erstere die Länge $2a$, die letztere die Länge b haben und von der durch den Durchschnittspunkt des Spiegels der Flüssigkeit mit der festen Achse gelegten horizontalen Ebene um die Abstände $h + a$ und $h - a$ entfernt sind, hat man nach früher erhaltenen Werthen für V'' das Integral:

$$V'' = \frac{1}{3g} \int_k^{k+b} d\eta_1 \cdot \left[\sqrt{[\mathfrak{v}_0^2 + \varphi^2 R^2 + 2g(h+a) + \varphi^2 \eta_1^2]^3} - \sqrt{[\mathfrak{v}_0^2 + \varphi^2 R^2 + 2g(h-a) + \varphi^2 \eta_1^2]^3} \right]$$

auszuführen, in welchem k und $k + b$ die Entfernungen der verticalen Seiten der Oeffnung von der $\xi\zeta$-Ebene sind, welches aber vollständig durchgeführt eine sehr ausgedehnte Form annimmt. Für den Fall übri-

gens, daß k und b nicht groß sind, also namentlich, wenn b nicht groß und $k = -\frac{1}{2} b$ ist, so daß die Ebene der $\xi \zeta$ durch die Mitte der Ausflußöffnung geht, so kann man mit hinreichender Annäherung

$$[\mathfrak{v}_0^2 + \varphi^2 R^2 + 2g(h+a) + \varphi^2 \eta_1^2]^{\frac{3}{2}} = c_1^3 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\varphi^2}{c_1^2} \eta_1^2\right),$$

$$[\mathfrak{v}_0^2 + \varphi^2 R^2 + 2g(h-a) + \varphi^2 \eta_1^2]^{\frac{3}{2}} = c_2^3 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\varphi^2}{c_2^2} \eta_1^2\right)$$

setzen, und erhält dann den Ausdruck:

$$V'' = \frac{b}{3g} \left[c_1^3 - c_2^3 + \frac{1}{8} \varphi^2 (c_1 - c_2) b^2\right]$$
$$= \frac{b}{3g} (c_1^3 - c_2^3) \left[1 + \frac{\varphi^2 b^2}{8(c_1^2 + c_1 c_2 + c_2^2)}\right],$$

oder mit weiterer Vernachlässigung des Gliedes mit $\varphi^2 b^2$

$$V'' = \frac{b}{3g}\left[\sqrt{[\mathfrak{v}_0^2 + \varphi^2 R^2 + 2g(h+a)]^3} - \sqrt{[\mathfrak{v}_0^2 + \varphi^2 R^2 + 2g(h-a)]^3}\right].$$

Wenn die Oeffnung kreisförmig ist, so wird man wie in §. 38 die Punkte derselben durch die Hülfs-Coordinaten r und ψ in der Ebene der Oeffnung bestimmen, deren Pol im Mittelpunkt des Kreises und deren Achse horizontal ist, so daß man hat $\zeta_1 = h + r \sin \psi$, $\mathfrak{r}_1^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 = l^2 + (k + r \cos \psi)^2$ wenn h den Abstand des Mittelpunktes der Oeffnung von der Tangential-Ebene im Scheitel der Spiegelfläche, l den senkrechten Abstand der festen ζ-Achse von der Ebene der Ausflußöffnung und k die Entfernung des Mittelpunktes der letztern von der dazu normalen $\xi \zeta$-Ebene bezeichnet. Es ist dann wie dort

$$\frac{d^2 V''}{d\psi \, dr} = \mathfrak{r}_1 r = r\sqrt{\mathfrak{v}_0^2 + 2gh + \varphi^2 l^2 + 2gr \sin\psi + \varphi^2 (k + r\cos\psi)^2},$$

und wenn dann $\mathfrak{v}_0^2 + 2gh + \varphi^2(l^2 + h^2)$ durch c^2 ersetzt wird und a der Halbmesser der Ausflußöffnung ist, so hat man

$$V'' = c\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^a dr \,.\, r\sqrt{1 + 2\frac{g \sin\psi + h\varphi^2 \cos\psi}{c^2} r + \frac{\varphi^2}{c^2} r^2 \cos^2\psi}\,.$$

Die Wurzelgröße dieses Ausdrucks kann wieder wie in §. 38 in eine Reihe entwickelt und dann jedes Glied nach r und ω integrirt werden. Meistens kann man das letzte Glied der Wurzelgröße vernachlässigen und hat dann in erster Annäherung

$$V'' = c\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^a dr \,.\, r\left(1 + \frac{g\,sin\,\psi + \varphi^2 h\,cos\,\psi}{c^2}\,r\right)$$

$$= \pi a^2 c = O_1\sqrt{v_0^2 + 2gh + \varphi^2(l^2 + h^2)}\ .$$

Für eine weitergehende Annäherung findet man

$$V'' = c\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^a dr \,.\, r\left(1 + \frac{g\,sin\,\psi + \varphi^2 h\,cos\,\psi}{c^2}\,r \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\,\frac{\varphi^2 c^2 cos^2\psi - (g\,sin\,\psi + \varphi^2 h\,cos\,\psi)^2}{c^4}\,r^2\right)$$

$$= \pi a^2 c\left(1 - \frac{1}{8}\,\frac{\varphi^2 h^2 + g^2 - \varphi^2 c^2}{c^2}\,.\,\frac{a^2}{c^2}\right).$$

Ist die Ausflußöffnung hinreichend klein, daß man sich mit der ersten Annäherung begnügen kann, so kann auch der im Mittelpunkt austretende Strahl als der die mittlere Geschwindigkeit besitzende angenommen werden; die Entfernung dieses Strahles von der festen Achse, um welche die Drehung des Gefäßes statt hat, ist $= R$, und die mittlere Geschwindigkeit w_1 ist nun die oben mit c bezeichnete Größe; man hat daher, da für die Spiegelfläche $w_\eta = w_\xi = 0$ ist,

$$\mathop{\Delta_s}_{s_0}^{s_1} \cdot (\xi_{\prime} w_\eta - \eta_{\prime} w_\xi) = -\,k\,w_1 = -\,k\,c\ .$$

Hat ferner das Gefäß an der Spiegelfläche eine symmetrische Gestalt um die feste Achse, so daß man auch $\xi_{\prime}$ und $\eta_{\prime}$ für $s = s_0$ gleich Null annehmen kann, so wird

$$\mathop{\Delta_s}_{s_0}^{s_1} \cdot \varphi\,(\xi_{\prime}^2 + \eta_{\prime}^2) = \varphi\,(l^2 + k^2) = \varphi R^2 = R v\ ,$$

worin nun R den Abstand des Mittelpunktes der Ausflußöffnung von der Drehungsachse und v die Geschwindigkeit dieses Punktes bezeichnet,

und damit ergibt sich für die drehende Wirkung des von der Flüssigkeit auf das ganze Gefäß ausgeübten Druckes um diese Achse nach (106) der Werth:

$$\mathfrak{M}_\zeta = -\, q V'' (\varphi R^2 - k c) = q O_1 c (k c - R v) \quad ,$$

der dann auch die nothwendige Größe des um dieselbe Achse im entgegengesetzten Sinne drehenden Momentes äußerer Kräfte ausdrückt, durch welches das Gefäß in seiner gleichförmigen Drehung erhalten werden kann.

Geht die Ebene der Ausflußöffnung durch die Achse, so wird $k = R$ und daher hat man einfacher

$$\mathfrak{M}_\zeta = q O_1 c R (c - v) = q V'' R (c - v) \quad .$$

Bezeichnen wir endlich noch das Massemoment des Gefäßes in Bezug auf die Drehungsachse mit $\mathfrak{C}_1$, das der in ihm enthaltenen Flüssigkeit mit $\mathfrak{C}_2$, und lassen wir noch ein Moment $Q r$ an demselben im entgegengesetzten Sinne des Momentes $\mathfrak{M}_\xi$ angreifen, so erhalten wir für die drehende Bewegung des Gefäßes zunächst die Gleichung:

$$\mathfrak{C}_1 \frac{d\varphi}{dt} = \mathfrak{M}_\zeta - Q r$$

und mit dem vollständigen Werthe von $\mathfrak{M}_\zeta$ (106) folgt, wie übrigens leicht vorher zu schließen war,

$$(\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2) \frac{d\varphi}{dt} = q V'' (k c - R v) - Q r \quad ,$$

da wie oben bemerkt

$$q \int_{s_0}^{s_1} ds \, . \, O'' (\xi_r^2 + \eta_r^2) = \mathfrak{C}_2$$

das Massemoment der in dem Gefäß enthaltenen Flüssigkeit bedeutet.

§. 49.

Wie die Gleichungen (104) für die innere Bewegung einer Flüssigkeitsmasse, welche in einer drehenden Bewegung um eine feste Achse begriffen ist, aus den Gleichungen (100) des dritten Buches abgeleitet

wurden, so folgen die allgemeineren für eine beliebige äußere drehende Bewegung und für eine combinirte fortschreitende und drehende aus den Gleichungen (99). Wir gehen jedoch darauf nicht weiter ein, da dieselben kaum einer Anwendung fähig sind, und sich auch nicht leicht ein beachtenswerther Fall für deren Anwendung vorfinden dürfte.

Was dann noch die den Gleichungen (104), (105) und (106) entsprechenden speciellen Beziehungen für die gasförmigen Flüssigkeiten betrifft, so sind diese noch den in §§. (33), (34) und (43) abgeleiteten Beziehungen für äußeres Gleichgewicht auch im Falle einer äußern drehenden Bewegung um eine feste Achse mittels der Substitution:

$$q = q\frac{p}{P}$$

aus den Gleichungen (102) leicht zu entwickeln; sie unterscheiden sich übrigens von den Gleichungen (104) bis (106) nur in der Form des Werthes von v_1 und geben weder zu einer besondern Betrachtung noch zu einer besondern Anwendung Veranlassung.

III. Oscillirende Bewegung eines flüssigen Systems.

§. 50.

Bei den oscillirenden Bewegungen eines flüssigen Systems sind die absoluten Aenderungen der Lage der einzelnen Flüssigkeitstheilchen nothwendig in bestimmte Grenzen eingeschlossen, wie bei den oscillirenden Bewegungen eines veränderlichen Systems von fester Aggregatform, und sie können wie bei diesen Systemen immer als sehr klein voraus gesetzt werden. Die relativen Aenderungen der gegenseitigen Lage der flüssigen Theilchen werden dann jedenfalls noch viel kleiner sein; wir dürfen daher annehmen, daß bei diesen sehr kleinen Aenderungen der gegenseitigen Lage der Flüssigkeitstheilchen keines derselben die Grenzen überschreitet, welche durch die Flüssigkeitstheilchen, die es ursprünglich umgeben haben, gezogen sind, daß also diese Flüssigkeitstheilchen, die das erstere ursprünglich umgeben haben, es fortwährend in gleicher Ordnung, wenn auch in veränderten gegenseitigen Abständen umgeben, wie es bei den oscillirenden Bewegungen veränderlicher Systeme der festen Aggregatform der Fall ist.

Aus der ersten Voraussetzung folgt, daß für die Untersuchung oscillirender Bewegungen flüssiger Systeme die in §. 44 des dritten Buches abgeleiteten Gleichungen (98), oder wenn die Untersuchung auf die Voraussetzung eines äußeren Gleichgewichtszustandes beschränkt wird, die in §. 85 daselbst aufgeführten Gleichungen (138) anzuwenden sind, nämlich die Gleichungen:

$$107.)\quad \begin{cases} q\,\dfrac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = qX + \dfrac{\partial T_x}{\partial x} + \dfrac{\partial S_z}{\partial y} + \dfrac{\partial S_y}{\partial z}\,, \\[2ex] q\,\dfrac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} = qY + \dfrac{\partial S_z}{\partial x} + \dfrac{\partial T_y}{\partial y} + \dfrac{\partial S_x}{\partial z}\,, \\[2ex] q\,\dfrac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = qZ + \dfrac{\partial S_y}{\partial x} + \dfrac{\partial S_x}{\partial y} + \dfrac{\partial T_z}{\partial z}\,, \end{cases}$$

worin $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die kleinen Verrückungen des Punktes $x\,y\,z$ parallel zu den drei Coordinaten-Achsen bedeuten, und T_x, T_y, T_z, S_x, S_y, S_z die in diesem Punkte statthabenden Spannungen sind. Und aus unserer zweiten Annahme, daß während der oscillirenden Bewegung kein Flüssigkeitstheilchen die Wirkungssphäre der es umgebenden Atome überschreitet, daß dasselbe also nicht zu andern Atomen eine neue Gleichgewichtslage einnimmt, wie bei der fließenden Bewegung, sondern immer das Bestreben behält, in seine ursprüngliche Gleichgewichtslage zurückzukehren, geht schon offenbar hervor, daß im jetzigen Falle die verschiedenen Spannungen S_x, S_y, S_z, welche mit der Störung des Gleichgewichtszustandes ebensowohl auftreten, wie die normalen Spannungen T_x, T_y, T_z, nicht wie bei der fließenden Bewegung vernachlässigt werden dürfen; denn wenn sich jene Widerstände gegen die Verschiebung schon bei der fließenden Bewegung sehr fühlbar machen, wie die Erfahrung zeigt *), so muß ihr Einfluß bei den oscillirenden Bewegungen noch viel wesentlicher sein, da *solche Bewegungen denkbar sind und in der Natur wirklich vorkommen, welche nur in Verschiebungen bestehen und daher ohne die Berücksichtigung der Spannungen S gar nicht dargestellt werden können, nämlich die Wellenbewegungen, bei denen die Oscillationen senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung sind.* Solche Wellenbewegungen zeigen sich nicht nur auf der freien Oberfläche schwerer tropfenbildender Flüssigkeiten, gerade solche Bewegungen einer höchst ausdehnsam-elastischen Flüssigkeit, des *Aethers*, sind es ja auch, durch welche die *Lichterscheinungen* erzeugt und fortgepflanzt werden, und obgleich man sich lange gegen die Zulassung transversaler Oscillationen der Aethertheilchen glaubte sträuben zu müssen, weil die bisherigen Gleichungen für die Bewegung der Flüssigkeiten solche Oscillationen nicht zulassen, und obgleich man dennoch durch die Erscheinungen selbst zu dieser Annahme gezwungen wurde, hat man es doch nicht für nothwendig gefunden, jene Gleichungen zu verbessern und dem Grund des betreffenden Mangels nachzuspüren.

Ja dieser Mangel gab sich schon in der *Newton*'schen Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der atmosphärischen Luft kund, obgleich hier die Vibrationen in der Richtung der

*) Insbesondere durch die Verzögerung der Bewegung in Röhren und Kanälen, aber auch schon durch die Verminderung der Ausflußgeschwindigkeit aus weiten Gefäßen durch kurze Ausflußöffnungen.

Fortpflanzung stattfinden, weil, wie wir sogleich sehen werden, auch auf diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit die Spannungen S von Einfluß sind; bis jetzt aber tröstete man sich hinsichtlich der Differenz zwischen jener Newton'schen Formel und der Erfahrung durch eine für die Zeit ihrer Entstehung sehr geistreiche Hypothese von Laplace, welche sich auf die durch Compression der Luft entwickelte Wärme und die mit der Temperatur-Erhöhung wachsende Spannung derselben stützt, welche indessen bis jetzt durch keinen entscheidenden Versuch bewiesen ist und bei näherer Beleuchtung jede Wahrscheinlichkeit verliert, und die von Laplace vielleicht nicht aufgestellt worden wäre, wenn zu seiner Zeit schon der Sieg der Undulationstheorie des Lichtes über die Emanationstheorie entschieden gewesen wäre, wenn die erstere schon ihre jetzige Ausbildung erreicht gehabt hätte, und durch ihren Einfluß auf die Untersuchung der Wärme-Erscheinungen die in der neuesten Zeit eingetretene Aenderung in den Ansichten über das Wesen der Wärme schon damals eingetreten wäre. Wir werden übrigens auf diese Hypothese noch einmal ausführlicher zu sprechen kommen.

§. 51.

Um die Gleichungen (107) anwenden zu können, müssen zunächst wieder die Spannungen T und S durch die Dehnungen $\frac{\delta \xi}{\delta x}$, $\frac{\delta \xi}{\delta y}$, $\frac{\delta \eta}{\delta y}$, u. s. f. ausgedrückt werden. Beschränken wir uns dafür auf eine homogene Flüssigkeit, welche im Zustande des Gleichgewichtes und ohne Einwirkung äußerer Kräfte durchaus dieselbe Dichte und Spannung besitzt, für welche wir also auch eine constante Elasticität nach jeder Richtung hin annehmen müssen, beachten aber zugleich dabei, daß wir für die Flüssigkeiten von einem Gleichgewichts-Zustande ausgehen müssen, bei welchem schon eine Spannung vorhanden ist, und zwar eine nach jeder Richtung hin gleiche normale Spannung P_0, ferner daß für die kleinen Bewegungen, die wir nun betrachten, die Spannungen ebensowohl im doppelten Sinne, als Zug und als Druck auftreten, wie bei den veränderlichen Systemen der festen Aggregatform, und daß daher wie bei diesen die Spannungen in demselben Sinne wie die Dehnungen zu nehmen sind, so erhalten wir zunächst (vergl. Buch III, §. 85) die allgemeinen Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
T_x &= P_0 + A_1 \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + B_1 \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + C_1 \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} + \frac{1}{2} D_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x}\right) + \text{etc.} \\
T_y &= P_0 + A_2\, \mathfrak{a} + B_2\, \mathfrak{b} + C_2\, \mathfrak{c} + D_2\, \mathfrak{f} + \text{etc.} \\
T_z &= P_0 + A_3\, \mathfrak{a} + B_3\, \mathfrak{b} + C_3\, \mathfrak{c} + D_3\, \mathfrak{f} + \text{etc.} \\
S_z &= \mathit{A}_1\, \mathfrak{a} + \mathit{B}_1\, \mathfrak{b} + \mathit{C}_1\, \mathfrak{c} + \text{etc.} \\
S_y &= \mathit{A}_2\, \mathfrak{a} + \mathit{B}_2\, \mathfrak{b} + \mathit{C}_2\, \mathfrak{c} + \text{etc.} \\
S_x &= \mathit{A}_3\, \mathfrak{a} + \mathit{B}_3\, \mathfrak{b} + \mathit{C}_3\, \mathfrak{c} + \text{etc.}
\end{aligned}\right\}$$

Aus diesen gehen aber auf demselben Wege, wie an dem angeführten Orte, unter Zugrundlegung unserer obigen Voraussetzung, daß die Elasticität der Flüssigkeit nach jeder Richtung hin dieselbe ist, die nothwendigen Beziehungen zwischen den obigen 36 constanten Coefficienten A_1, B_1, A_2, B_2, A_1, B_1 u. s. f. hervor, und die Werthe der sechs Spannungen nehmen damit folgende einfachere Form an:

$$\left.\begin{aligned}
T_x &= P_0 + \varepsilon_2 \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}\right) + \varepsilon_1 \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}, \\
&= P_0 + \varepsilon_2 \varrho + \varepsilon_1 \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}, \\
T_y &= P_0 + \varepsilon_2 \varrho + \varepsilon_1 \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y}; \quad T_z = P_0 + \varepsilon_2 \varrho + \varepsilon_1 \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}, \\
S_z &= \frac{1}{2} \varepsilon_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x}\right), \quad S_y = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x}\right), \\
S_x &= \frac{1}{2} \varepsilon_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x}\right),
\end{aligned}\right\} \quad (108.$$

worin wie dort $\varrho = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}$ die geometrische Raumausdehnung ist.

Die sechs Spannungen hängen demnach auch hier von zwei Elasticitäts-Coefficienten ε_1 und ε_2 ab, und zwar die normalen Spannungen T von beiden zugleich, die verschiebenden Spannungen S nur von dem erstern allein. Bei den dehnbaren oder zusammendrückbaren Körpern der festen Aggregatform konnten wir diese Coefficienten miteinander durch einen einzigen Versuch bestimmen (Buch III, §. 86), nämlich aus der Dehnung oder Stauung eines prismatischen Stabes durch eine nur in einer Richtung wirkende Kraft, wobei sowohl die Verlängerung

oder Verkürzung des Stabes in der Richtung dieser Kraft, als die Verminderung oder Vermehrung seiner Ausdehnung in der dazu senkrechten Richtung gemessen und so die beiden zur Bestimmung von ε_1 und ε_2 nothwendigen und genügenden Gleichungen (142) daselbst erhalten werden können. Bei den Flüssigkeiten läßt sich dieses Verfahren nicht mehr anwenden. Wir können hier nur den Fall zur Anwendung bringen, wo der Körper von allen Seiten durch gleiche normale Kräfte zusammengepreßt wird, indem wir die betreffende Flüssigkeit in einem unveränderlichen Gefäß durch einen von außen wirkenden geometrischen Druck P comprimiren, und die Raumänderung ϱ messen. Wir haben dann $T_x = T_y = T_z = -P$, $S_x = S_y = S_z = 0$, und dem gemäß auch den ursprünglich auf der Flüssigkeit lastenden Druck P_0 negativ zu nehmen, und erhalten daher die Gleichungen:

$$P_0 - P = \varepsilon_2 \varrho + \varepsilon_1 \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} = \varepsilon_2 \varrho + \varepsilon_1 \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} = \varepsilon_2 \varrho + \varepsilon_1 \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} .$$

Aus diesen zieht man $3(P_0 - P) = (\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2)\varrho$, $\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 = \frac{3(P_0 - P)}{\varrho}$ und kann demnach durch diesen Versuch nur den Werth der Summe $\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2$ oder $\varepsilon_2 + \frac{1}{3}\varepsilon_1$ bestimmen; die Coefficienten ε_1 und ε_2 selbst müssen durch directe Beobachtung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit oscillirender Bewegungen bestimmt werden, oder durch Vergleichung der Geschwindigkeit der fließenden Bewegung mit der Geschwindigkeit, welche aus einer unter Berücksichtigung der Kräfte S oder des Coefficienten ε_1 construirten genaueren Theorie dieser Bewegung hervorgeht.

Für die tropfenbildenden Flüssigkeiten zeigen die Versuche, daß für einen Druck von einigen Atmosphären die relative Volumenänderung der Aenderung des Druckes proportional, oder daß das Verhältniß: $\frac{P_0 - P}{\varrho} = \frac{P - P_0}{V_0 - V} V$, wenn V_0 das Volumen unter dem Drucke P_0, V das unter dem Drucke P bezeichnet, nahe constant bleibt; es ist daher für diese auch $\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2$ innerhalb dieser Grenzen constant. Für Wasser insbesondere ist, wenn $\mathbf{P}$ den Druck von einer Atmosphäre bezeichnet, in runder Zahl *) $\varrho = 0{,}000050 \frac{P_0 - P}{\mathbf{P}}$, $\frac{P_0 - P}{\varrho} = 20000\,\mathbf{P}$; woraus für

---

*) Nahe mit den Ergebnissen der Versuche von Colladon und Sturm übereinstimmend; nach Oersted wäre $\varrho = 0{,}000048 \frac{P_0 - P}{\mathbf{P}}$.

metrisches Maß, Quadratmeter und Kilogramm,

$$\varepsilon_2 + \frac{1}{3}\,\varepsilon_1 = 20000 \,.\, 10332 = 206\,640\,000^{\text{Kgr.}}$$

folgt.

Für die Gase hat man nach dem Mariotte'schen Gesetz

$$P\,V = \mathbf{P}\,\mathbf{V} = P_0\,V_0 \;,$$

also auch

$$\frac{P - P_0}{P_0} = \frac{V_0 - V}{V_0} = -\,\varrho \;, \qquad \frac{P_0 - P}{\varrho} = P_0 \;,$$

folglich für alle Gase

$$\varepsilon_2 + \frac{1}{3}\,\varepsilon_1 = P_0 \;,$$

d. h. der zusammengesetzte Coefficient $\varepsilon_2 + \frac{1}{3}\varepsilon_1$ ist immer gleich der Spannung des Gases in dem Gleichgewichtszustande, von dem an die Aenderungen der Lage der einzelnen Theilchen, also auch die Aenderungen des Raumes und der Dichte gerechnet werden.

§. 52.

Führen wir nun die Aenderungsgesetze der obigen Werthe (108) von T_x, T_y, T_z, S_z, S_y, S_x in die Gleichungen (107) ein, so erhalten wir dieselben Gleichungen für die oscillirenden Bewegungen eines flüssigen Systems, wie im vorhergehenden Buche für die eines veränderlichen Systems überhaupt [Buch III, §. 91. Gl. (154)], nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} &= X + a^2\frac{\partial\varrho}{\partial x} + b^2\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z}\right)}{\partial z}\right] ,\\
\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} &= Y + a^2\frac{\partial\varrho}{\partial y} + b^2\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial y}\right)}{\partial z} - \frac{\partial\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}\right)}{\partial x}\right] ,\\
\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} &= Z + a^2\frac{\partial\varrho}{\partial z} + b^2\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial y}\right)}{\partial y}\right] .
\end{aligned}\right\}(109.$$

Mit diesen Gleichungen ergeben sich dann auch für die flüssigen Systeme alle Folgerungen, welche in den §§. 91 bis 96 des dritten Buches aus den Gleichungen (157) daselbst gezogen wurden, und von denen wir folgende als die wesentlichsten hervorheben wollen:

1) Wenn die kleinen Verschiebungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ durch die Formen:

$$110.)\quad \mathfrak{x} = \frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial x}, \quad \mathfrak{y} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \mathfrak{z} = \frac{\partial F}{\partial z}$$

dargestellt werden können, so hat man

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y} = 0,$$

$$\varrho = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2};$$

die mit b^2 multiplizirten Glieder der Gleichungen (109) verschwinden, diese Gleichungen kommen also auf

$$111.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2} = X + a^2 \dfrac{\partial \varrho}{\partial x}, \quad \dfrac{d^2 \mathfrak{y}}{dt^2} = Y + a^2 \dfrac{\partial \varrho}{\partial y}, \\ \dfrac{d^2 \mathfrak{z}}{dt^2} = Z + a^2 \dfrac{\partial \varrho}{\partial z}, \end{cases}$$

zurück und lassen sich zu einer neuen:

$$\frac{d^2 F}{dt^2} = \int ds \, . \left(X \frac{\partial x}{\partial s} + Y \frac{\partial y}{\partial s} + Z \frac{\partial z}{\partial s} \right) + a^2 \varrho$$

combiniren, welche die bezeichnende Eigenschaft der Function F darstellt. Man hat dann aber auch

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \int ds . \left(X \frac{\partial x}{\partial s} + Y \frac{\partial y}{\partial s} + Z \frac{\partial z}{\partial s} \right) = V,$$

worin V nur eine Function von x, y und z ist, und die vorstehende Gleichung nimmt die Form an:

$$112.)\quad \frac{d^2 F}{dt^2} = V + a^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right);$$

sie bestimmt so allgemeine Formen der Function F, welche die Auflösung der Gleichungen (111) enthalten, wenn sie auch den anfänglichen Zuständen und den Grenzen des Systems entsprechen, und dann durch die Gleichungen (110) die Gesetze der oscillirenden Bewegung darstellen. Einige dieser allgemeinen Formen sind in §. 91 des dritten Buches angegeben.

Diese nur von dem Coeffizienten $a^2 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{q}$ abhängende Art der oscillirenden Bewegung kennzeichnet sich besonders als eine solche, bei welcher die Oscillationen in der Richtung der Fortpflanzung der Bewegung stattfinden und die geometrische Raumausdehnung sowohl mit der Zeit als mit dem Ort veränderlich ist.

2) Können dagegen die periodischen Verschiebungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ durch die Formen:

$$\mathfrak{x} = \frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial y} \;, \quad \mathfrak{y} = \frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z} \;, \quad \mathfrak{z} = \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \quad (113.$$

dargestellt werden, worin f_1, f_2 und f_3 verschiedene Functionen von x, y, z und t bezeichnen, so hat man

$$\varrho = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} = 0 \;, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{\partial \varrho}{\partial y} = \frac{\partial \varrho}{\partial z} = 0 \;;$$

es verschwinden nun die mit a^2 multiplizirten Glieder der Gleichungen (109) und die Bewegung ist nur von dem Coefficient b^2 abhängig. Macht man dann

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = U \;,$$

$$b^2 \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} \right) = W_1 \;, \quad b^2 \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} \right) = W_2 \;,$$

u. s. f.

und beachtet, daß man hat

$$\frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2} = \frac{d^2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial y} \right)}{dt^2} = \frac{\partial \frac{d^2 f_2}{dt^2}}{\partial z} - \frac{\partial \frac{d^2 f_3}{dt^2}}{\partial y} \;,$$

u. s. f.

so führen die Gleichungen (109) auf die Bedingungen:

$$114.)\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0 \ , \\ X=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y} \ , \quad Y=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z} \ , \quad Z=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x} \ , \end{cases}$$

worin X, Y, Z neue unter sich unabhängige Functionen von x, y, z sind, und auf die Gleichungen:

$$115.)\begin{cases} \frac{d^2 f_1}{dt^2}=X+b^2\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}\right) \ , \\ \frac{d^2 f_2}{dt^2}=Y+b^2\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}\right) \ , \\ \frac{d^2 f_3}{dt^2}=Z+b^2\left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}\right) \ , \end{cases}$$

durch welche mit Rücksicht auf den anfänglichen Zustand und die äußern Verhältnisse des Systems die Wahl der unter sich gänzlich unabhängigen und in der allgemeinen Form mit den Functionen F übereinstimmenden Functionen f_1, f_2, f_3 bestimmt wird.

Die oscillirenden Bewegungen dieser Art, die nur von dem Coefficienten ε_1 abhängen, kennzeichnen sich dadurch, daß die Dichte q während der Bewegung unverändert bleibt, daß die Oscillationen nur in Verschiebungen bestehen und senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung sind.

3) Alle übrigen Bewegungen lassen sich aus den beiden vorhergehenden zusammensetzen.

§. 53.

Die einfachsten Fälle der unter 1) und 2) dargestellten Bewegungen sind schon in dem vorhergehenden Buche in den §§. 92, 93 und 95 behandelt worden, nämlich die oscillirenden Bewegungen mit ebenen, stehenden und fortlaufenden Wellen, und diese Untersuchungen lassen sich unter entsprechenden Voraussetzungen und mit der erforderlichen Modification des in §. 93 behandelten Falles auch auf flüssige Systeme anwenden; bei diesen Systemen sind aber diejenigen oscillirenden Bewegungen die wichtigeren, welche von einem Erregungs-Mittelpunkte ausgehen und sich in kugelförmigen Wellen fortpflanzen, und für die Untersuchung solcher Bewegungen ist es offenbar zweckmäßiger Kugel-Coordi-

naten anzuwenden, d. h. die Gleichungen (107) für solche Coordinaten umzuformen.

Bestimmen wir demnach die Lage eines Punktes durch die Polar-Coordinaten r, ω, ϑ in unserer gewöhnlichen Annahme, so daß wir die Beziehungen:

$$x = r \sin\vartheta \cos\omega \quad , \quad y = r \sin\vartheta \sin\omega \quad , \quad z = r \cos\vartheta \qquad \text{(a.}$$

zwischen ihnen und den rechtwinklichen Coordinaten haben, und bezeichnen die kleinen Verschiebungen dieses Punktes nach drei unter sich rechtwinkligen Richtungen, von denen die erste in die Verlängerung des Fahrstrahles r fällt, die zweite rückwärts durch die Polar- oder frühere z-Achse geht oder in der Ebene des Winkels ϑ liegt und im Sinne von ϑ gerichtet ist, die dritte also auf der Ebene dieses Winkels senkrecht steht, parallel zur xy-Ebene und im Sinne des Winkels ω gerichtet ist, mit $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$, so haben wir zwischen diesen und den Verrückungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ parallel zu den ursprünglichen Achsen die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \mathfrak{r} \cos\widehat{\mathfrak{r}x} + \mathfrak{q} \cos\widehat{\mathfrak{q}x} + \mathfrak{p} \cos\widehat{\mathfrak{p}x} \\ \mathfrak{y} &= \mathfrak{r} \cos\widehat{\mathfrak{r}y} + \mathfrak{q} \cos\widehat{\mathfrak{q}y} + \mathfrak{p} \cos\widehat{\mathfrak{p}y} \\ \mathfrak{z} &= \mathfrak{r} \cos\widehat{\mathfrak{r}z} + \mathfrak{q} \cos\widehat{\mathfrak{q}z} + \mathfrak{p} \cos\widehat{\mathfrak{p}z} \end{aligned}\right\}$$

oder da man hat:

$$\cos\widehat{\mathfrak{r}x} = \sin\vartheta \cos\omega \quad , \quad \cos\widehat{\mathfrak{r}y} = \sin\vartheta \sin\omega \quad , \quad \cos\widehat{\mathfrak{r}z} = \cos\vartheta \quad ,$$

$$\cos\widehat{\mathfrak{q}x} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) \cos\omega \quad , \quad \cos\widehat{\mathfrak{q}y} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) \sin\omega \quad ,$$

$$\cos\widehat{\mathfrak{q}z} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) \quad ,$$

$$\cos\widehat{\mathfrak{p}x} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) \quad , \quad \cos\widehat{\mathfrak{p}y} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) \quad , \quad \cos\widehat{\mathfrak{p}z} = 0 \quad ,$$

die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \mathfrak{r} \sin\vartheta \cos\omega + \mathfrak{q} \cos\vartheta \cos\omega - \mathfrak{p} \sin\omega \quad , \\ \mathfrak{y} &= \mathfrak{r} \sin\vartheta \cos\omega + \mathfrak{q} \cos\vartheta \sin\omega + \mathfrak{p} \cos\omega \quad , \\ \mathfrak{z} &= \mathfrak{r} \cos\vartheta - \mathfrak{q} \sin\vartheta \quad . \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b.}$$

Wir werden ferner die Resultirende der Kräfte qX, qY, qZ mit $q\mathfrak{R}$ und ihre Componenten parallel zu den Richtungen der Verschiebungen $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$ mit qR, qQ, qP bezeichnen, so daß wir haben

$$\text{c.)} \left\{ \begin{aligned} R &= X \sin\vartheta \cos\omega + Y \sin\vartheta \sin\omega + Z \cos\vartheta \ , \\ Q &= X \cos\vartheta \cos\omega + Y \cos\vartheta \sin\omega - Z \sin\vartheta \ , \\ P &= - X \sin\omega + Y \cos\omega \ . \end{aligned} \right.$$

Endlich bezeichnen wir die Componenten der Spannungen $T^{(x)}$, $T^{(y)}$, $T^{(z)}$ in den zu den alten Achsen senkrechten Schnittebenen parallel zu den eben genannten Richtungen genommen mit $T_r^{(x)}$, $T_\vartheta^{(x)}$, $T_\omega^{(x)}$, $T_r^{(y)}$, $T_\vartheta^{(y)}$, u. s. f., und die zu denselben Richtungen parallelen Componenten der Spannungen $T^{(r)}$, $T^{(\vartheta)}$, $T^{(\omega)}$, welche in den zu diesen Richtungen senkrechten Schnittebenen hervorgerufen werden, entsprechend mit $T_r^{(r)}$, $T_\vartheta^{(r)}$, $T_\omega^{(r)}$, $T_r^{(\vartheta)}$, $T_\vartheta^{(\vartheta)}$, u. s. f. und erhalten darnach einmal zwischen den Componenten derselben Spannung $T^{(x)}$, $T^{(y)}$ oder $T^{(z)}$ nach den Achsen der x, y, z und denen nach den Achsen der $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$ die Beziehungen:

$$\text{d.)} \left\{ \begin{aligned} T_x^{(x)} &= T_r^{(x)} \sin\vartheta \cos\omega + T_\vartheta^{(x)} \cos\vartheta \cos\omega - T_\omega^{(x)} \sin\omega \ , \\ T_x^{(y)} &= T_r^{(y)} \sin\vartheta \cos\omega + T_\vartheta^{(y)} \cos\vartheta \cos\omega - T_\omega^{(y)} \sin\omega \ , \\ &\text{u. s. f.} \\ T_y^{(x)} &= T_r^{(x)} \sin\vartheta \sin\omega + T_\vartheta^{(x)} \cos\vartheta \sin\omega + T_\omega^{(x)} \cos\omega \\ T_z^{(x)} &= T_r^{(x)} \cos\vartheta - T_\vartheta^{(x)} \sin\vartheta \ , \\ &\text{u. s. f.} \end{aligned} \right.$$

und dann zufolge der Gleichungen (79) in §. 39 des dritten Buches zwischen den Componenten jener Spannungen $T^{(x)}$, $T^{(y)}$, $T^{(z)}$ und denen der neuen Spannungen $T^{(r)}$, $T^{(\vartheta)}$, $T^{(\omega)}$ je nach den neuen Achsen der $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$ die Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l}
T_r^{(x)} = T_r^{(r)} \sin\vartheta \cos\omega + T_r^{(\vartheta)} \cos\vartheta \cos\omega - T_r^{(\omega)} \sin\omega \;, \\
T_\vartheta^{(x)} = T_\vartheta^{(r)} \sin\vartheta \cos\omega + T_\vartheta^{(\vartheta)} \cos\vartheta \cos\omega - T_\vartheta^{(\omega)} \sin\omega \;, \\
\quad \text{u. s. f.} \\
T_r^{(y)} = T_r^{(r)} \sin\vartheta \sin\omega + T_r^{(\vartheta)} \cos\vartheta \sin\omega + T_r^{(\omega)} \cos\omega \;, \\
T_r^{(z)} = T_r^{(r)} \cos\vartheta - T_r^{(\vartheta)} \sin\vartheta \;, \\
T_\vartheta^{(z)} = T_\vartheta^{(r)} \cos\vartheta - T_\vartheta^{(\vartheta)} \sin\vartheta \;. \\
\quad \text{u. s. f.}
\end{array}\right\} (e.$$

Beachtet man nun, daß die Aenderungsgesetze $\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}$, u. s. f. in den Gleichungen (107) nur in Bezug auf die Zeit allein zu verstehen sind, so zieht man aus den Gleichungen (b) die Werthe:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} \sin\vartheta \cos\omega + \frac{d^2\mathfrak{q}}{dt^2} \cos\vartheta \cos\omega - \frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} \sin\omega \;, \\
\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} \sin\vartheta \sin\omega + \frac{d^2\mathfrak{q}}{dt^2} \cos\vartheta \sin\omega + \frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} \cos\omega \;, \\
\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} \cos\vartheta - \frac{d^2\mathfrak{q}}{dt^2} \sin\vartheta \;.
\end{array}\right\} (f.$$

In den Gleichungen (d) dagegen sind sowohl die Spannungen $T_r^{(x)}$, $T_\vartheta^{(x)}$, u. s. f., als die Winkel ω und ϑ als Functionen von x, y und z zu nehmen, und man hat daher, wenn die $\cos\widehat{\mathfrak{r}x}$, $\cos\widehat{\mathfrak{r}y}$, $\cos\widehat{\mathfrak{r}z}$, $\cos\widehat{\mathfrak{q}x}$, u. s. f. wieder mit a, b, c, a', u. s. f. bezeichnet werden:

$$\frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial x} = a\frac{\partial T_r^{(x)}}{\partial x} + a'\frac{\partial T_\vartheta^{(x)}}{\partial x} + a''\frac{\partial T_\omega^{(x)}}{\partial x} + T_r^{(x)}\frac{\partial a}{\partial x} + T_\vartheta^{(x)}\frac{\partial a'}{\partial x} + T_\omega^{(x)}\frac{\partial a''}{\partial x} \;,$$

$$\frac{\partial T_x^{(y)}}{\partial y} = a\frac{\partial T_r^{(y)}}{\partial y} + a'\frac{\partial T_\vartheta^{(y)}}{\partial y} + a''\frac{\partial T_\omega^{(y)}}{\partial y} + T_r^{(y)}\frac{\partial a}{\partial y} + T_\vartheta^{(y)}\frac{\partial a'}{\partial y} + T_\omega^{(y)}\frac{\partial a''}{\partial y} \;,$$

$$\frac{\partial T_x^{(z)}}{\partial z} = a\frac{\partial T_r^{(z)}}{\partial z} + a'\frac{\partial T_\vartheta^{(z)}}{\partial z} + a''\frac{\partial T_\omega^{(z)}}{\partial z} + T_r^{(z)}\frac{\partial a}{\partial z} + T_\vartheta^{(z)}\frac{\partial a'}{\partial z} + T_\omega^{(z)}\frac{\partial a''}{\partial z} \;,$$

$$\frac{\partial T_y^{(x)}}{\partial x} = b\frac{\partial T_r^{(x)}}{\partial x} + b'\frac{\partial T_\vartheta^{(x)}}{\partial x} + b''\frac{\partial T_\omega^{(x)}}{\partial x} + T_r^{(x)}\frac{\partial b}{\partial x} + T_\vartheta^{(x)}\frac{\partial b'}{\partial x} + T_\omega^{(x)}\frac{\partial b''}{\partial x} \;,$$

u. s. f.

Führt man nun diese Werthe in die Gleichungen (107) ein, und multiplizirt die letztern alsdann der Reihe nach mit a, b, c und nimmt die Summe der Producte, so folgt mit Berücksichtigung der Gleichungen (c) und (f) und der zwischen den Cosinus a, b, c, a' u. s. f. bestehenden Bedingungen und ihrer Aenderungsgesetze je nach x, y, z, die neue Gleichung:

$$
\text{g.)}\left\{\begin{aligned}
q\frac{d^2 r}{dt^2} &= qR + \frac{\delta T_r^{(x)}}{\delta x} + \frac{\delta T_r^{(y)}}{\delta y} + \frac{\delta T_r^{(z)}}{\delta z} \\
&+ T_\vartheta^{(x)}\left(a\frac{\delta a'}{\delta x} + b\frac{\delta b'}{\delta x} + c\frac{\delta c'}{\delta x}\right) + T_\omega^{(x)}\left(a\frac{\delta a''}{\delta x} + b\frac{\delta b''}{\delta x}\right) \\
&+ T_\vartheta^{(y)}\left(a\frac{\delta a'}{\delta y} + b\frac{\delta b'}{\delta y} + c\frac{\delta c'}{\delta y}\right) + T_\omega^{(y)}\left(a\frac{\delta a''}{\delta y} + b\frac{\delta b''}{\delta y}\right) \\
&+ T_\vartheta^{(z)}\left(a\frac{\delta a'}{\delta z} + b\frac{\delta b'}{\delta z} + c\frac{\delta c'}{\delta z}\right) + T_\omega^{(z)}\left(a\frac{\delta a''}{\delta z} + b\frac{\delta b''}{\delta z}\right).
\end{aligned}\right.
$$

Ferner hat man

$$
\text{h.)}\left\{\begin{aligned}
&\frac{\delta a}{\delta x} = \cos\vartheta\cos\omega\frac{\delta\vartheta}{\delta x} - \sin\vartheta\sin\omega\frac{\delta\omega}{\delta x}, \\
&\frac{\delta b}{\delta x} = \cos\vartheta\sin\omega\frac{\delta\vartheta}{\delta x} + \sin\vartheta\cos\omega\frac{\delta\omega}{\delta x}, \quad \frac{\delta c}{\delta x} = -\sin\vartheta\frac{\delta\vartheta}{\delta x}, \\
&\frac{\delta a'}{\delta x} = -\sin\vartheta\cos\omega\frac{\delta\vartheta}{\delta x} - \cos\vartheta\sin\omega\frac{\delta\omega}{\delta x}, \\
&\frac{\delta b'}{\delta x} = -\sin\vartheta\sin\omega\frac{\delta\vartheta}{\delta x} + \cos\vartheta\cos\omega\frac{\delta\omega}{\delta x}, \quad \frac{\delta c'}{\delta x} = -\cos\frac{\delta\vartheta}{\delta x}, \\
&\frac{\delta a''}{\delta y} = -\cos\omega\frac{\delta\omega}{\delta y}, \quad \frac{\delta b''}{\delta z} = -\sin\omega\frac{\delta\omega}{\delta z}, \text{ u. s. f.}
\end{aligned}\right.
$$

aus den nach ω, ϑ und r aufgelösten Beziehungen (a) zwischen den rechtwinkligen und den Polar-Coordinaten, nämlich:

$$
r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \tang\vartheta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}, \quad \tang\omega = \frac{y}{x},
$$

findet man

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \sin\vartheta\cos\omega \;,\quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\vartheta\sin\omega \;,\quad \frac{\partial r}{\partial z} = \cos\vartheta \;,\\[2mm]
\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\cos\vartheta\cos\omega}{r} \;,\quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{\cos\vartheta\sin\omega}{r} \;,\quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = -\frac{\sin\vartheta}{r} \;,\\[2mm]
\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{\sin\omega}{r\sin\vartheta} \;,\quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\cos\omega}{r\sin\vartheta} \;,\quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \;,
\end{array}\right\} \quad (\mathrm{i}.$$

und damit ergeben sich weiter die Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{l}
a\frac{\partial a'}{\partial x} + b\frac{\partial b'}{\partial x} + c\frac{\partial c'}{\partial x} = -\left(a'\frac{\partial a}{\partial x} + b'\frac{\partial b}{\partial x} + c'\frac{\partial c}{\partial x}\right) = -\frac{\cos\vartheta\cos\omega}{r} = -\frac{a'}{r}\\[2mm]
a\frac{\partial a''}{\partial x} + b\frac{\partial b''}{\partial x} = -\left(a''\frac{\partial a}{\partial x} + b''\frac{\partial b}{\partial x}\right) = +\frac{\sin\omega}{r} = -\frac{a''}{r}\\[2mm]
a'\frac{\partial a''}{\partial x} + b'\frac{\partial b''}{\partial x} = -\left(a''\frac{\partial a'}{\partial x} + b''\frac{\partial b'}{\partial x}\right) = +\frac{\cos\vartheta\sin\omega}{r\sin\vartheta} = -\frac{a''c}{r\sin\vartheta}\\[2mm]
a\frac{\partial a'}{\partial y} + b\frac{\partial b'}{\partial y} + c\frac{\partial c'}{\partial y} = -\left(a'\frac{\partial a}{\partial y} + b'\frac{\partial b}{\partial y} + c'\frac{\partial c}{\partial y}\right) = -\frac{\cos\vartheta\sin\omega}{r} = -\frac{b'}{r}\\[2mm]
a\frac{\partial a''}{\partial y} + b\frac{\partial b''}{\partial y} = -\frac{\cos\omega}{r} = -\frac{b''}{r} \;,\quad a'\frac{\partial a''}{\partial y} + b'\frac{\partial b''}{\partial y} = -\frac{\cos\vartheta\cos\omega}{r\sin\vartheta} = -\frac{b''c}{r\sin\vartheta}\\[2mm]
\qquad a\frac{\partial a'}{\partial z} + b\frac{\partial b'}{\partial z} + c\frac{\partial c'}{\partial z} = \frac{\sin\vartheta}{r} = -\frac{c'}{r} \;,\\[2mm]
\quad a\frac{\partial a''}{\partial z} + b\frac{\partial b''}{\partial z} = 0 \;,\quad a'\frac{\partial a''}{\partial z} + b'\frac{\partial b''}{\partial z} = 0 \;.
\end{array}\right\} \quad (\mathrm{k}.$$

Mit diesen Werthen nimmt die Gleichung (g) zunächst die Form:

$$\left.\begin{array}{l}
q\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = qR + \frac{\partial T_r^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial T_r^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial T_r^{(z)}}{\partial z}\\[2mm]
\qquad - \frac{1}{r}\left(a' T_\vartheta^{(x)} + b' T_\vartheta^{(y)} + c' T_\vartheta^{(z)} + a'' T_\omega^{(x)} + b'' T_\omega^{(y)}\right)
\end{array}\right\} \quad (\mathrm{l}.$$

an, worin nun noch die Componenten $T_r^{(x)}$, $T_r^{(y)}$, $T_\vartheta^{(x)}$, u. s. f. durch die Componenten $T_r^{(r)}$, $T_\vartheta^{(r)}$, $T_r^{(\vartheta)}$, u. s. f. und die Aenderungsgesetze

nach x, y, z durch die in Bezug auf r, ϑ und ω zu ersetzen sind. Dazu hat man einmal

m.)
$$\frac{\partial T_r^{(x)}}{\partial x} = \frac{\partial T_r^{(x)}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial T_r^{(x)}}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial T_r^{(x)}}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x}$$
$$= a\frac{\partial T_r^{(x)}}{\partial r} + \frac{a'}{r}\frac{\partial T_r^{(x)}}{\partial \vartheta} + \frac{a''}{r \sin\vartheta}\frac{\partial T_r^{(x)}}{\partial \omega},$$
$$\frac{\partial T_\vartheta^{(x)}}{\partial x} = a\frac{\partial T_\vartheta^{(x)}}{\partial r} + \frac{a'}{r}\frac{\partial T_\vartheta^{(x)}}{\partial \vartheta} + \frac{a''}{r \sin\vartheta}\frac{\partial T_\vartheta^{(x)}}{\partial \omega},$$
$$\frac{\partial T_r^{(y)}}{\partial y} = \frac{\partial T_r^{(y)}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial T_r^{(y)}}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial T_r^{(y)}}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}$$
$$= b\frac{\partial T_r^{(y)}}{\partial r} + \frac{b'}{r}\frac{\partial T_r^{(y)}}{\partial \vartheta} + \frac{b''}{r \sin\vartheta}\frac{\partial T_r^{(y)}}{\partial \omega},$$
u. s. f.

und die Gleichungen (e) geben

n.)
$$\frac{\partial T_r^{(x)}}{\partial r} = a\frac{\partial T_r^{(r)}}{\partial r} + a'\frac{\partial T_r^{(\vartheta)}}{\partial r} + a''\frac{\partial T_r^{(\omega)}}{\partial r}$$
$$\frac{\partial T_r^{(x)}}{\partial \vartheta} = a\frac{\partial T_r^{(r)}}{\partial \vartheta} + a'\frac{\partial T_r^{(\vartheta)}}{\partial \vartheta} + a''\frac{\partial T_r^{(\omega)}}{\partial \vartheta} + T_r^{(r)}\frac{\partial a}{\partial \vartheta} + T_r^{(\vartheta)}\frac{\partial a'}{\partial \vartheta} + T_r^{(\omega)}\frac{\partial a''}{\partial \vartheta},$$
$$\frac{\partial T_r^{(x)}}{\partial \omega} = a\frac{\partial T_r^{(r)}}{\partial \omega} + a'\frac{\partial T_r^{(\vartheta)}}{\partial \omega} + a''\frac{\partial T_r^{(\omega)}}{\partial \omega} + T_r^{(r)}\frac{\partial a}{\partial \omega} + T_r^{(\vartheta)}\frac{\partial a'}{\partial \omega} + T_r^{(\omega)}\frac{\partial a''}{\partial \omega},$$
$$\frac{\partial T_r^{(y)}}{\partial r} = b\frac{\partial T_r^{(r)}}{\partial r} + b'\frac{\partial T_r^{(\vartheta)}}{\partial r} + b''\frac{\partial T_r^{(\omega)}}{\partial r}$$
$$\frac{\partial T_r^{(y)}}{\partial \vartheta} = b\frac{\partial T_r^{(r)}}{\partial \vartheta} + b'\frac{\partial T_r^{(\vartheta)}}{\partial \vartheta} + b''\frac{\partial T_r^{(\omega)}}{\partial \vartheta} + T_r^{(r)}\frac{\partial b}{\partial \vartheta} + T_r^{(\vartheta)}\frac{\partial b'}{\partial \vartheta} + T_r^{(\omega)}\frac{\partial b''}{\partial \vartheta},$$
u. s. f.

Es ist aber auch durch Umkehrung der Gleichungen (e)

$$a' T_\vartheta^{(x)} + b' T_\vartheta^{(y)} + c' T_\vartheta^{(z)} = T_\vartheta^{(\vartheta)} \quad , \qquad a'' T_\omega^{(x)} + b'' T_\omega^{(y)} = T_\omega^{(\omega)} \quad ,$$

und die Gleichung (1) wird mit diesen Umbildungs-Gleichungen

$$q \frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} = q R + \frac{\partial T_r^{(r)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_r^{(\vartheta)}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial T_r^{(\omega)}}{\partial \omega}$$

$$+ \frac{T_r^{(r)}}{r} \left(a' \frac{\partial a}{\partial \vartheta} + b' \frac{\partial b}{\partial \vartheta} + c' \frac{\partial c}{\partial \vartheta} + a'' \frac{\partial a}{\partial \omega} + b'' \frac{\partial b}{\partial \omega} \right)$$

$$+ \frac{T_r^{(\vartheta)}}{r \sin \vartheta} \left(a'' \frac{\partial a'}{\partial \omega} + b'' \frac{\partial b'}{\partial \omega} \right) + \frac{T_r^{(\omega)}}{r \sin \vartheta} \left(a' \frac{\partial a''}{\partial \vartheta} + b' \frac{\partial b''}{\partial \vartheta} \right)$$

$$- \frac{1}{r} \left(T_\vartheta^{(\vartheta)} + T_\omega^{(\omega)} \right) \quad ,$$

oder da man hat

$$a' \frac{\partial a}{\partial \vartheta} + b' \frac{\partial b}{\partial \vartheta} + c' \frac{\partial c}{\partial \vartheta} = a'' \frac{\partial a}{\partial \omega} + b'' \frac{\partial b}{\partial \omega} = 1$$

$$a'' \frac{\partial a'}{\partial \omega} + b'' \frac{\partial b'}{\partial \omega} = \cos \vartheta \quad , \quad a' \frac{\partial a''}{\partial \vartheta} + b' \frac{\partial b''}{\partial \vartheta} = 0$$

in einfachster Form:

$$\left. \begin{aligned} q \frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} &= q R + \frac{2 T_r^{(r)} - T_\vartheta^{(\vartheta)} - T_\omega^{(\omega)}}{r} \\ &+ \frac{\partial T_r^{(r)}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial . T_r^{(\vartheta)} \sin \vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial . T_r^{(\omega)}}{\partial \omega} \; . \end{aligned} \right\} (o.$$

Multiplizirt man dann die Gleichungen (107), nachdem darin die oben erwähnten Substitutionen vorgenommen worden, der Reihe nach mit a', b', c' und nimmt die Summe der Producte, so erhält man

$$q\frac{d^2\mathfrak{q}}{dt^2} = qQ + \frac{\partial T_\vartheta^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial T_\vartheta^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial T_\vartheta^{(z)}}{\partial z}$$

$$+ T_r^{(x)}\left(a'\frac{\partial a}{\partial x} + b'\frac{\partial b}{\partial x} + c'\frac{\partial c}{\partial x}\right) + T_\omega^{(x)}\left(a'\frac{\partial a''}{\partial x} + b'\frac{\partial b''}{\partial x}\right)$$

$$+ T_r^{(y)}\left(a'\frac{\partial a}{\partial y} + b'\frac{\partial b}{\partial y} + c'\frac{\partial c}{\partial y}\right) + T_\omega^{(y)}\left(a'\frac{\partial a''}{\partial y} + b'\frac{\partial b''}{\partial y}\right)$$

$$+ T_r^{(z)}\left(a'\frac{\partial a}{\partial z} + b'\frac{\partial b}{\partial z} + c'\frac{\partial c}{\partial z}\right) + T_\omega^{(z)}\left(a'\frac{\partial a''}{\partial z} + b'\frac{\partial b''}{\partial z}\right)$$

$$= qQ + \frac{\partial T_\vartheta^{(y)}}{\partial x} + \frac{\partial T_\vartheta^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial T_\vartheta^{(z)}}{\partial z}$$

$$+ \frac{1}{r}\left(a' T_r^{(x)} + b' T_r^{(y)} + c' T_r^{(z)}\right) - \frac{c}{r \sin\vartheta}\left(a'' T_\omega^{(x)} + b'' T_\omega^{(y)}\right),$$

und unter Anwendung der Beziehungen (m), (e) und (n) folgt daraus

$$\text{p.)}\quad \begin{cases} q\dfrac{d^2\mathfrak{q}}{dt^2} = qQ + \dfrac{2T_\vartheta^{(r)} + T_r^{(\vartheta)} - T_\omega^{(\omega)}\cot\vartheta}{r} \\[2ex] \qquad + \dfrac{\partial T_\vartheta^{(r)}}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\,\dfrac{\partial . T_\vartheta^{(\vartheta)}\sin\vartheta}{\partial\vartheta} + \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\,\dfrac{\partial T_\vartheta^{(\omega)}}{\partial\omega}. \end{cases}$$

Endlich erhält man noch die dritte Gleichung der oscillirenden Bewegung in Bezug auf Kugelcoordinaten, wenn man die beiden ersten der Gleichungen (107) nach vorausgegangenen Substitutionen mit a″ und b″ multiplizirt und die Summe der Producte in ähnlicher Weise wie vorher behandelt; man findet so nach und nach

$$q\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} = qP + \frac{\partial T_\omega^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial T_\omega^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial T_\omega^{(z)}}{\partial z}$$

$$+ \frac{1}{r}\left(a'' T_r^{(x)} + b'' T_r^{(y)}\right) + \frac{c}{r\sin\vartheta}\left(a'' T_\vartheta^{(x)} + b'' T_\vartheta^{(y)}\right)$$

und

$$\text{q.)}\quad \begin{cases} q\dfrac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} = qP + \dfrac{2T_\omega^{(r)} - T_r^{(\omega)} + T_\vartheta^{(\omega)}\cot\vartheta}{r} \\[2ex] \qquad + \dfrac{\partial T_\omega^{(r)}}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\,\dfrac{\partial . T_\omega^{(\vartheta)}\sin\vartheta}{\partial\vartheta} + \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\,\dfrac{\partial T_\omega^{(\omega)}}{\partial\omega}. \end{cases}$$

Zuletzt wird man noch beachten, daß die zu derselben Achse senkrechten verschiebenden Spannungen einander gleich sind, und daß man deßhalb wieder die Bezeichnung:

$$T^{(r)}_{\vartheta} = T^{(\vartheta)}_{r} = S_{\omega}\,, \quad T^{(r)}_{\omega} = T^{(\omega)}_{r} = S_{\vartheta}\,, \quad T^{(\vartheta)}_{\omega} = T^{(\omega)}_{\vartheta} = S_{r}$$

anwenden und die drei normalen Spannungen $T^{(r)}_{r}$, $T^{(\vartheta)}_{\vartheta}$, $T^{(\omega)}_{\omega}$ einfach durch T_r, T_ϑ, T_ω ersetzen kann. Ferner kann man $r\,\vartheta$ durch u, $r\,\omega \sin\vartheta$ durch w ersetzen, daraus die Aenderungsgesetze:

$$\frac{\delta u}{\delta \vartheta} = r\,, \quad \frac{\delta w}{\delta \omega} = r \sin\vartheta\,, \quad \frac{\delta S_\omega}{\delta \vartheta} = \frac{\delta S_\omega}{\delta u}\,\frac{\delta u}{\delta \vartheta} = r\,\frac{\delta S_\omega}{\delta u}\,, \quad \text{u. s. f.}$$

ziehen, und damit die Gleichungen (o), (p) und (q) auf die möglichst einfache Form:

$$\left.\begin{aligned}
q\frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} &= qR + \frac{\delta T_r}{\delta r} + \frac{\delta S_\omega}{\delta u} + \frac{\delta S_\vartheta}{\delta w} + \frac{2T_r - T_\vartheta - T_\omega + S_\omega \cot\vartheta}{r}\,,\\
q\frac{d^2 \mathfrak{q}}{dt^2} &= qQ + \frac{\delta S_\omega}{\delta r} + \frac{\delta T_\vartheta}{\delta u} + \frac{\delta S_r}{\delta w} + \frac{3S_\omega + (T_\vartheta - T_\omega)\cot\vartheta}{r}\,,\\
q\frac{d^2 \mathfrak{p}}{dt^2} &= qP + \frac{\delta S_\vartheta}{\delta r} + \frac{\delta S_r}{\delta u} + \frac{\delta T_\omega}{\delta w} + \frac{3S_\vartheta + 2S_r \cot\vartheta}{r}
\end{aligned}\right\} \text{(116.}$$

zurückführen.

In dieser Form, worin r, $u = r\vartheta$ und $w = r\omega \sin\vartheta$ als die Coordinaten eines Punktes zu betrachten sind, stimmen diese Gleichungen bis auf die letzten Glieder der rechten Seite vollkommen mit den Gleichungen (107) überein; sie unterscheiden sich aber wesentlich von den letztern durch die ebengenannten Glieder, welche noch die Spannungen selbst enthalten, und welche davon herrühren, daß die Lage der Achsen der $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}$ von einem Punkte zum andern veränderlich ist.

§. 54.

Die Gleichungen (116) sind wie die Gleichungen (107) noch auf jedes veränderliche System anwendbar; um sie aber anwenden zu können, müssen zuvor wieder die Beziehungen zwischen den Spannungen T_r, S_ω, u. s. f. und den Dehnungen $\frac{\delta \mathfrak{r}}{\delta r}$, $\frac{\delta \mathfrak{r}}{\delta u}$, $\frac{\delta \mathfrak{q}}{\delta u}$, u. s. f.

je nach der Beschaffenheit des Systems festgestellt werden, wie wir es jetzt für eine homogen-elastische Flüssigkeit thun wollen.

Dazu gehen wir von den Gleichungen (108) aus und drücken darin die Dehnungen $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y}, \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y}$, u. s. f. durch unsere neuen Dehnungen $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial r}, \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial w}$, u. s. f. aus. Die Gleichungen (h) in §. 53 geben

$$\text{r.)}\begin{cases}
\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial r} = a\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial r} + a'\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial r} + a''\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial r}, \\
\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u} = a\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial u} + a'\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial u} + a''\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial u} + \mathfrak{r}\frac{\partial a}{\partial u} + \mathfrak{q}\frac{\partial a'}{\partial u} + \mathfrak{p}\frac{\partial a''}{\partial u}, \\
\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial w} = a\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial w} + a'\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial w} + a''\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial w} + \mathfrak{r}\frac{\partial a}{\partial w} + \mathfrak{q}\frac{\partial a'}{\partial w} + \mathfrak{p}\frac{\partial a''}{\partial w}, \\
\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial r} = b\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial r} + b'\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial r} + b''\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial r}, \\
\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial u} = b\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial u} + b'\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial u} + b''\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial u} + \mathfrak{r}\frac{\partial b}{\partial u} + \mathfrak{q}\frac{\partial b'}{\partial u} + \mathfrak{p}\frac{\partial b''}{\partial u}, \\
\text{u. s. f.}
\end{cases}$$

Ferner hat man mit Berücksichtigung der Werthe (i)

$$\begin{cases}
\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x} = a\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial r} + a'\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u} + a''\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial w}, \\
\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y} = b\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial r} + b'\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u} + b''\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial w}, \\
\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial z} = c\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial r} + c'\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u}, \\
\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x} = a\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial r} + a'\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial u} + a''\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial w}, \\
\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y} = b\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial r} + b'\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial u} + b''\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial w}, \\
\text{u. s. f.}
\end{cases}$$

und daraus folgen mit den Werthen (r) und den Beziehungen:

$$\frac{\partial a}{\partial u}=\frac{a'}{r}\,,\quad \frac{\partial a'}{\partial u}=-\frac{a}{r}\,,\quad \frac{\partial a''}{\partial u}=0\,,$$

$$\frac{\partial a}{\partial w}=-\frac{b}{r\sin\vartheta}=\frac{a''}{r}\,,\quad \frac{\partial a'}{\partial w}=-\frac{b'}{r\sin\vartheta}\,,\quad \frac{\partial a''}{\partial w}=-\frac{b''}{r\sin\vartheta}\,;$$

$$\frac{\partial b}{\partial u}=\frac{b'}{r}\,,\quad \frac{\partial b'}{\partial u}=-\frac{b}{r}\,,\quad \frac{\partial b''}{\partial u}=0\,;$$

$$\frac{\partial b}{\partial w}=\frac{a}{r\sin\vartheta}=\frac{b''}{r}\,,\quad \frac{\partial b'}{\partial w}=\frac{a'}{r\sin\vartheta}\,,\quad \frac{\partial b''}{\partial w}=\frac{a''}{r\sin\vartheta}\,;$$

$$\frac{\partial c}{\partial u}=\frac{c'}{r}\,,\quad \frac{\partial c'}{\partial u}=-\frac{c}{r}\,,$$

die Umbildungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{a}=\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}&=a^2\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial r}+a'^2\frac{\partial\mathfrak{q}}{\partial u}+a''^2\frac{\partial\mathfrak{p}}{\partial w}\\
&\quad+aa'\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial u}+\frac{\partial\mathfrak{q}}{\partial r}\right)+aa''\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial w}+\frac{\partial\mathfrak{p}}{\partial r}\right)+a'a''\left(\frac{\partial\mathfrak{q}}{\partial w}+\frac{\partial\mathfrak{p}}{\partial u}\right)\\
&\quad+(a'^2+a''^2)\frac{\mathfrak{r}}{r}-\left(aa'+\frac{a''b'}{\sin\vartheta}\right)\frac{\mathfrak{q}}{r}-a''b''\frac{\mathfrak{p}}{r\sin\vartheta}\,,\\
\mathfrak{b}=\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y}&=b^2\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial r}+b'^2\frac{\partial\mathfrak{q}}{\partial u}+b''^2\frac{\partial\mathfrak{p}}{\partial w}\\
&\quad+bb'\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial u}+\frac{\partial\mathfrak{q}}{\partial r}\right)+bb''\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial w}+\frac{\partial\mathfrak{p}}{\partial r}\right)+b'b''\left(\frac{\partial\mathfrak{q}}{\partial w}+\frac{\partial\mathfrak{p}}{\partial u}\right)\\
&\quad+(b'^2+b''^2)\frac{\mathfrak{r}}{r}-\left(bb'-\frac{a'b''}{\sin\vartheta}\right)\frac{\mathfrak{q}}{r}+a''b''\frac{\mathfrak{p}}{r\sin\vartheta}\,,\\
\mathfrak{c}=\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial z}&=c^2\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial r}+c'^2\frac{\partial\mathfrak{q}}{\partial u}+cc'\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial u}+\frac{\partial\mathfrak{q}}{\partial r}\right)+c'^2\frac{\mathfrak{r}}{r}-cc'\frac{\mathfrak{q}}{r}\,,
\end{aligned}\right\}\text{(8.}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} = a\,b\,\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial r} + a'\,b'\,\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial u} + a''\,b''\,\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial w}$$
$$+ a\,b'\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial u} + a'b\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial r} + a\,b''\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial w} + a''b\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial r} + a'b''\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial w} + a''b'\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial u}$$
$$+ (a'b' + a''b'')\frac{\mathfrak{r}}{r} - \left(a\,b' + \frac{b'\,b''}{\sin\vartheta}\right)\frac{\mathfrak{q}}{r} - b''^2\frac{\mathfrak{p}}{r\sin\vartheta}\;,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} = a\,b\,\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial r} + a'\,b'\,\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial u} + a''\,b''\,\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial w}$$
$$+ a'b\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial u} + a\,b'\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial r} + a''b\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial w} + a\,b''\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial r} + a''b'\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial w} + a'b''\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial u}$$
$$+ (a'b' + a''b'')\frac{\mathfrak{r}}{r} - \left(a'b - \frac{a'\,a''}{\sin\vartheta}\right)\frac{\mathfrak{q}}{r} + a''^2\frac{\mathfrak{p}}{r\sin\vartheta}\;,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z} = a\,c\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial r} + a'c'\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial u} + a\,c'\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial u} + a'c\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial r} + a'c'\frac{\mathfrak{r}}{r} - a\,c'\frac{\mathfrak{q}}{r}\;,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x} = a\,c\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial r} + a'c'\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial u} + a'c\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial u} + a\,c'\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial r} + a'c'\frac{\mathfrak{r}}{r} - a'c\frac{\mathfrak{q}}{r}\;,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z} = b\,c\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial r} + b'c'\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial u} + b\,c'\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial u} + b'c\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial r} + b'c'\frac{\mathfrak{r}}{r} + b\,c'\frac{\mathfrak{q}}{r}\;,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y} = b\,c\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial r} + b'c'\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial u} + b\,c'\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial u} + b\,c'\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial r} + b'c'\frac{\mathfrak{r}}{r} - b'c\frac{\mathfrak{q}}{r}\;.$$

Mit diesen Gleichungen findet man sofort für die Raumausdehnung den Ausdruck:

117.) $$\varrho = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial r} + \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial w} + \frac{2\mathfrak{r}}{r} + \frac{\mathfrak{q}}{r}\cot\vartheta\;,$$

und für die Verschiebungen $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ die Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{f} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\delta \mathfrak{x}}{\delta y}+\frac{\delta \mathfrak{y}}{\delta x}\right) = a b \frac{\delta \mathfrak{r}}{\delta r} + a' b' \frac{\delta \mathfrak{q}}{\delta u} + a'' b'' \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta w} \\
&\quad + \frac{1}{2}(a'b+ab')\left(\frac{\delta \mathfrak{r}}{\delta u}+\frac{\delta \mathfrak{q}}{\delta r}\right) + \frac{1}{2}(a''b+ab'')\left(\frac{\delta \mathfrak{r}}{\delta w}+\frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta r}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}(a''b'+a'b'')\left(\frac{\delta \mathfrak{q}}{\delta w}+\frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta u}\right) \\
&\quad + (a'b'+a''b'')\frac{\mathfrak{r}}{r} - \frac{1}{2}\left(a'b+ab'-\frac{a'a''-b'b''}{\sin\vartheta}\right)\frac{\mathfrak{q}}{r} \\
&\quad + \frac{1}{2}(a''^2-b''^2)\frac{\mathfrak{p}}{r\sin\vartheta}\,, \\
\mathfrak{g} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\delta \mathfrak{x}}{\delta z}+\frac{\delta \mathfrak{z}}{\delta x}\right) = a c \frac{\delta \mathfrak{r}}{\delta r} + a' c' \frac{\delta \mathfrak{q}}{\delta u} + a'' c'' \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta w} \\
&\quad + \frac{1}{2}(a'c+ac')\left(\frac{\delta \mathfrak{r}}{\delta u}+\frac{\delta \mathfrak{q}}{\delta r}\right) + a'c'\frac{\mathfrak{r}}{r} - \frac{1}{2}(a'c+ac')\frac{\mathfrak{q}}{r}\,, \\
\mathfrak{h} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\delta \mathfrak{y}}{\delta z}+\frac{\delta \mathfrak{z}}{\delta y}\right) = b c \frac{\delta \mathfrak{r}}{\delta r} + b' c' \frac{\delta \mathfrak{q}}{\delta u} + b'' c'' \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta w} \\
&\quad + \frac{1}{2}(b'c+bc')\left(\frac{\delta \mathfrak{r}}{\delta u}+\frac{\delta \mathfrak{q}}{\delta r}\right) + b'c'\frac{\mathfrak{r}}{r} - \frac{1}{2}(b'c+bc')\frac{\mathfrak{q}}{r}\,.
\end{aligned}\right\}(t.$$

Aus den Gleichungen (d) und (e) in §. 53 zieht man übereinstimmend mit den Werthen (b) in §. 85 des dritten Buches die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
T_r &= a^2 T_x + b^2 T_y + c^2 T_z + 2abS_z + 2acS_y + 2bcS_x\,, \\
T_\vartheta &= a'^2 T_x + b'^2 T_y + c'^2 T_z + 2a'b'S_z + 2a'c'S_y + 2b'c'S_x\,, \\
T_\omega &= a''^2 T_x + b''^2 T_y + 2a''b''S_z\,, \\
S_\omega &= aa'T_x + bb'T_y + cc'T_z \\
&\quad + (ab'+a'b)S_z + (ac'+a'c)S_y + (bc'+b'c)S_x\,, \\
S_\vartheta &= aa''T_x + bb''T_y + (ab''+a''b)S_z + a''cS_y + b''cS_x\,, \\
S_r &= a'a''T_x + b'b''T_y + (a'b''+a''b')S_z + a''c'S_y + b''c'S_x\,,
\end{aligned}\right\}$$

und wenn man darin für T_x, T_y, u. s. f. die Werthe (108) in der Form

$$T_x = P_0+\varepsilon_1\mathfrak{a}+\varepsilon_2\varrho\,,\quad T_y = P_0+\varepsilon_1\mathfrak{b}+\varepsilon_2\varrho\,,\quad T_z = P_0+\varepsilon_1\mathfrak{c}+\varepsilon_2\varrho$$
$$S_z = \varepsilon_1\mathfrak{f}\,,\quad S_y = \varepsilon_1\mathfrak{g}\,,\quad S_x = \varepsilon_1\mathfrak{h}$$

einführt, so erhält man

$$
\text{u.)}\left\{\begin{aligned}
T_r &= P_0 + \varepsilon_2\varrho + \varepsilon_1 (a^2\mathfrak{a} + b^2\mathfrak{b} + c^2\mathfrak{c} + 2ab\mathfrak{f} + 2ac\mathfrak{g} + 2bc\mathfrak{h}) ,\\
T_\vartheta &= P_0 + \varepsilon_2\varrho + \varepsilon_1 (a'^2\mathfrak{a} + b'^2\mathfrak{b} + c'^2\mathfrak{c} + 2a'b'\mathfrak{f} + 2a'c'\mathfrak{g} + 2b'c'\mathfrak{h}) ,\\
T_\omega &= P_0 + \varepsilon_2\varrho + \varepsilon_1 (a''^2\mathfrak{a} + b''^2\mathfrak{b} + 2a''b''\mathfrak{f}) ,\\
S_\omega &= \varepsilon_1 [aa'\mathfrak{a} + bb'\mathfrak{b} + cc'\mathfrak{c} + (ab' + a'b)\mathfrak{f} + (ac' + a'c)\mathfrak{g}\\
&\qquad + (bc' + b'c)\mathfrak{h}] ,\\
S_\vartheta &= \varepsilon_1 [aa''\mathfrak{a} + bb''\mathfrak{b} + (ab'' + a''b)\mathfrak{f} + a''c\,\mathfrak{g} + b''c\,\mathfrak{h}] ,\\
S_r &= \varepsilon_1 [a'a''\mathfrak{a} + b'b''\mathfrak{b} + (a'b'' + a''b')\mathfrak{f} + a''c'\mathfrak{g} + b''c'\mathfrak{h}] ,
\end{aligned}\right.
$$

und wird dann mit den Werthen (s) und (t) und unter Beachtung der Bedingungsgleichungen:

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 1$$

$$a^2a'^2 + b^2b'^2 + c^2c'^2 + 2aa'bb' + 2aa'cc' + 2bb'cc' = (aa' + bb' + cc')^2 = 0 ,$$

u. s. f.

folgende Beziehungen zwischen den Spannungen T_r, T_ϑ, u. s. f., den Dehnungen $\frac{\delta \mathfrak{r}}{\delta r}$, $\frac{\delta \mathfrak{q}}{\delta u}$, u. s. f. und den Verschiebungen $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}$, u. s. f. selbst in einem homogen-elastischen System finden:

$$
118.)\left\{\begin{aligned}
T_r &= P_0 + \varepsilon_2\varrho + \varepsilon_1 \frac{\delta\mathfrak{r}}{\delta r} ,\\
T_\vartheta &= P_0 + \varepsilon_2\varrho + \varepsilon_1 \frac{\delta\mathfrak{q}}{\delta u} + \varepsilon_1 \frac{\mathfrak{r}}{r} ,\\
T_\omega &= P_0 + \varepsilon_2\varrho + \varepsilon_1 \frac{\delta\mathfrak{p}}{\delta w} + \varepsilon_1 \left(\frac{\mathfrak{r}}{r} - \frac{\mathfrak{q}}{r}\cot\vartheta\right) ,\\
S_\omega &= \frac{1}{2}\varepsilon_1 \left(\frac{\delta\mathfrak{r}}{\delta u} + \frac{\delta\mathfrak{q}}{\delta r}\right) - \frac{1}{2}\varepsilon_1 \frac{\mathfrak{q}}{r} ,\\
S_\vartheta &= \frac{1}{2}\varepsilon_1 \left(\frac{\delta\mathfrak{r}}{\delta w} + \frac{\delta\mathfrak{p}}{\delta r}\right) - \frac{1}{2}\varepsilon_1 \frac{\mathfrak{p}}{r} ,\\
S_r &= \frac{1}{2}\varepsilon_1 \left(\frac{\delta\mathfrak{q}}{\delta w} + \frac{\delta\mathfrak{p}}{\delta u}\right) - \frac{1}{2}\varepsilon_1 \frac{\mathfrak{p}}{r}\cot\vartheta .
\end{aligned}\right.
$$

Es erübrigt also noch, die Aenderungsgesetze dieser Werthe, sowie sie selbst in die Gleichungen (116) einzuführen.

Dazu hat man zunächst zu beachten, daß nur r, ϑ und ω die unabhängigen Veränderlichen sind, daß aber $u = r\vartheta$ von ϑ und r, und daß $w = r\omega \sin\vartheta$ von ω, ϑ und r abhängig ist, daß man daher hat

$$\frac{\partial \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial u}}{\partial r} = \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial r\, \partial u} - \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial w}}{\partial r} = \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial r\, \partial w} - \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial w},$$

$$\frac{\partial \cdot \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial w}}{\partial u} = \frac{\partial^2 \mathfrak{q}}{\partial w\, \partial u} - \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial w} \cot\vartheta, \quad \text{u. s. f.}$$

dagegen umgekehrt nur einfach

$$\frac{\partial \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial r}}{\partial u} = \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial r\, \partial u}, \qquad \frac{\partial \cdot \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial u}}{\partial w} = \frac{\partial^2 \mathfrak{q}}{\partial u\, \partial w}, \quad \text{u. s. f.}$$

und damit folgen sofort die Werthe:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial r} = \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{q}}{\partial r\, \partial u} + \frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial r\, \partial w}$$
$$+ \frac{1}{r}\left(2\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial r} - \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial u} - \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial w} + \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial r}\cot\vartheta - \frac{2\mathfrak{r}}{r} - \frac{\mathfrak{q}}{r}\cot\vartheta\right),$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial u} = \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial r\, \partial u} + \frac{\partial^2 \mathfrak{q}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial u\, \partial w}$$
$$+ \frac{1}{r}\left[2\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial u} + \left(\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial u} - \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial w}\right)\cot\vartheta - \frac{\mathfrak{q}}{r}\operatorname{cosec}^2\vartheta\right],$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial w} = \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial r\, \partial w} + \frac{\partial^2 \mathfrak{q}}{\partial u\, \partial w} + \frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial w^2} + \frac{1}{r}\left(2\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial w} + \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial w}\cot\vartheta\right),$$

$$\frac{\partial S_\omega}{\partial r} = \frac{1}{2}\varepsilon_1\left[\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial r\, \partial u} + \frac{\partial^2 \mathfrak{q}}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial r}\right) + \frac{\mathfrak{q}}{r^2}\right],$$

$$\frac{\partial S_\vartheta}{\partial r} = \frac{1}{2}\varepsilon_1\left[\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial r\, \partial w} + \frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial w} + \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial r}\right) + \frac{\mathfrak{p}}{r^2}\right],$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial u} = \frac{1}{2}\varepsilon_1\left[\frac{\partial^2 \mathfrak{q}}{\partial u\, \partial w} + \frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial u^2} - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial w} + \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial u}\right)\cot\vartheta + \frac{\mathfrak{p}}{r^2 \sin^2\vartheta}\right],$$

u. s. f.

Mit diesen Ausdrücken und wenn man noch den Gleichungen (116) der Reihe nach die Glieder:

$$\varepsilon_1 \frac{\delta \varrho}{\delta r} - \varepsilon_1 \left[\frac{\delta^2 \mathfrak{r}}{\delta r^2} + \frac{\delta^2 \mathfrak{q}}{\delta r \delta u} + \frac{\delta^2 \mathfrak{p}}{\delta r \delta w} + \frac{1}{r}\left(2\frac{\delta \mathfrak{r}}{\delta r} + \text{etc.}\right)\right],$$

$$\varepsilon_1 \frac{\delta \varrho}{\delta u} - \varepsilon_1 \left[\frac{\delta^2 \mathfrak{r}}{\delta r \delta u} + \frac{\delta^2 \mathfrak{q}}{\delta u^2} + \frac{\delta^2 \mathfrak{p}}{\delta u \delta w} + \frac{1}{r}\left(2\frac{\delta \mathfrak{r}}{\delta u} + \text{etc.}\right)\right],$$

$$\varepsilon_1 \frac{\delta \varrho}{\delta w} - \varepsilon_1 \left[\frac{\delta^2 \mathfrak{r}}{\delta r \delta w} + \frac{\delta^2 \mathfrak{q}}{\delta u \delta w} + \frac{\delta^2 \mathfrak{p}}{\delta w^2} + \frac{1}{r}\left(2\frac{\delta \mathfrak{r}}{\delta w} + \text{etc.}\right)\right]$$

beifügt, diese Gleichungen dann durch q dividirt und die Quotienten: $\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{q}$ und $\frac{\varepsilon_1}{2q}$ wieder durch a^2 und b^2 ersetzt, so kann man denselben zuerst die Form geben:

119ᵃ.)

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} &= R + a^2\frac{\delta \varrho}{\delta r} + \frac{b^2}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\delta\left(\frac{\delta . r\mathfrak{r}}{\delta u} - \frac{\delta . r\mathfrak{q}}{\delta r}\right)\sin\vartheta}{\delta u} - \frac{\delta\left(\frac{\delta . r\mathfrak{p}}{\delta r} - \frac{\delta . r\mathfrak{r}}{\delta w}\right)}{\delta w}\right],\\
\frac{d^2 \mathfrak{q}}{dt^2} &= Q + a^2\frac{\delta \varrho}{\delta u} + \frac{b^2}{r}\left[\frac{\delta\left(\frac{\delta . r\mathfrak{q}}{\delta w} - \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\delta . r\mathfrak{p}\sin\vartheta}{\delta u}\right)}{\delta w} - \frac{\delta\left(\frac{\delta . r\mathfrak{r}}{\delta u} - \frac{\delta . r\mathfrak{q}}{\delta r}\right)}{\delta r}\right],\\
\frac{d^2 \mathfrak{p}}{dt^2} &= P + a^2\frac{\delta \varrho}{\delta w} + \frac{b^2}{r}\left[\frac{\delta\left(\frac{\delta . r\mathfrak{p}}{\delta r} - \frac{\delta . r\mathfrak{r}}{\delta w}\right)}{\delta r} - \frac{\delta\left(\frac{\delta . r\mathfrak{q}}{\delta w} - \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\delta . r\mathfrak{p}\sin\vartheta}{\delta u}\right)}{\delta u}\right].
\end{aligned}\right.$$

Man wird aber aus diesen Formen bald erkennen, daß die mit b^2 multiplizirten Glieder symmetrischer werden, wenn man darin $v \sin\vartheta$ für w einführt; setzt man dann noch zur Abkürzung

$$\sin\vartheta = \vartheta',$$

A.)
$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\vartheta'}\left(\frac{\delta . r\mathfrak{q}}{\delta v} - \frac{\delta . r\mathfrak{p}\,\vartheta'}{\delta u}\right) = \mathfrak{R}, \quad \frac{1}{\vartheta'}\left(\frac{\delta . r\mathfrak{p}\,\vartheta'}{\delta r} - \frac{\delta . r\mathfrak{r}}{\delta v}\right) = \mathfrak{Q},\\
&\vartheta'\left(\frac{\delta . r\mathfrak{r}}{\delta u} - \frac{\delta . r\mathfrak{q}}{\delta r}\right) = \mathfrak{P},
\end{aligned}\right.$$

so erhält man für die Gleichungen (119ᵃ) die neue Form:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} &= R + a^2 \frac{\delta \varrho}{\delta r} + \frac{b^2}{r\vartheta'}\left(\frac{\delta \mathfrak{P}}{\delta u} - \frac{\delta \mathfrak{Q}}{\delta v}\right), \\
\frac{d^2 \mathfrak{q}}{dt^2} &= Q + a^2 \frac{\delta \varrho}{\delta u} + \frac{b^2}{r\vartheta'}\left(\frac{\delta \mathfrak{R}}{\delta v} - \frac{\delta \mathfrak{P}}{\delta r}\right), \\
\frac{d^2 \mathfrak{p}}{dt^2} &= P + a^2 \frac{\delta \varrho}{\delta w} + \frac{b^2}{r}\left(\frac{\delta \mathfrak{Q}}{\delta r} - \frac{\delta \mathfrak{R}}{\delta u}\right),
\end{aligned}\right\} \quad (119^b.$$

in welcher sie fast ganz mit den Gleichungen (109) übereinstimmen. Durch diese Form erkennt man dann auch sogleich, daß sich aus diesen Gleichungen für die Raumänderung ϱ ein ähnliches Gesetz, wie das in §. 91 des dritten Buches mit (162) bezeichnete ableiten läßt, wenn man sie mit $r^2 \vartheta'$ multiplizirt und der Reihe nach in Bezug auf r, u und w differenzirt, dann ihre Summe wieder durch $r^2 \vartheta'$ dividirt und beachtet, daß man hat

$$\frac{d^2 \varrho}{dt^2} = \frac{1}{r^2 \vartheta'} \frac{d^2\left(\frac{\delta . r^2 \mathfrak{r}}{\delta r} + \frac{\delta . \mathfrak{q}\, \vartheta'}{\delta u} + \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta w}\right)}{dt^2};$$

denn man findet so die neue Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2 \varrho}{dt^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\delta . r^2 R}{\delta r} + \frac{1}{\vartheta'}\frac{\delta . Q\, \vartheta'}{\delta u} + \frac{\delta P}{\delta w} \\
+ a^2\left(\frac{\delta^2 \varrho}{\delta r^2} + \frac{\delta^2 \varrho}{\delta u^2} + \frac{\delta^2 \varrho}{\delta w^2} + \frac{2}{r}\frac{\delta \varrho}{\delta r} + \frac{\cot \vartheta}{r}\frac{\delta \varrho}{\delta u}\right),
\end{aligned}\right\} \quad (120.$$

welche in Bezug auf Polarcoordinaten dasselbe Gesetz ausdrückt, das die genannte Gleichung (162) in Bezug auf rechtwinklige Coordinaten darstellt.

§. 55.

Dieser Uebereinstimmung gemäß werden wir dann auch aus den Gleichungen (119) ganz ähnliche Folgerungen ziehen, wie aus den Gleichungen (109); wir werden auch hier wieder zwei Klassen oscillirender Bewegungen unterscheiden können, nämlich 1) einfache oscillirende Bewegungen, d. h. solche, welche nur von einem der beiden Coefficienten a und b abhängen, und 2) zusammengesetzte oscillirende Bewegungen, welche von diesen beiden Coefficienten zugleich ab=

hängen, die also aus zwei verschiedenartigen einfachen Bewegungen zusammengesetzt werden können.

Die erste Art der einfachen oscillirenden Bewegungen oder die von dem Coefficienten a abhängige Bewegung kennzeichnet sich dadurch, daß man hat

$$\text{B.)}\quad \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial u} = \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial v}\ ,\quad \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial v} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial r}\ ,\quad \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial r} = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial u}\ ,$$

und die Gleichungen dieser Bewegungen sind daher einfach

$$\text{121.)}\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} = R + a^2 \dfrac{\partial \varrho}{\partial r}\ , \quad \dfrac{d^2 \mathfrak{q}}{dt^2} = Q + a^2 \dfrac{\partial \varrho}{\partial u}\ , \\[2ex] \dfrac{d^2 \mathfrak{p}}{dt^2} = P + a^2 \dfrac{\partial \varrho}{\partial w}\ . \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen zieht man aber, indem man die Veränderlichen r, u, w als gänzlich unabhängig unter sich betrachtet, die Bedingungen:

$$\text{C.)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial . \dfrac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2}}{\partial u} - \dfrac{\partial . \dfrac{d^2 \mathfrak{q}}{dt^2}}{\partial r} = \dfrac{d^2 . \left(\dfrac{\partial \mathfrak{r}}{\partial u} - \dfrac{\partial \mathfrak{q}}{\partial r}\right)}{dt^2} = \dfrac{\partial R}{\partial u} - \dfrac{\partial Q}{\partial r} = 0\ , \\[3ex] \dfrac{d^2 . \left(\dfrac{\partial \mathfrak{p}}{\partial r} - \dfrac{\partial \mathfrak{r}}{\partial w}\right)}{dt^2} = \dfrac{\partial P}{\partial r} - \dfrac{\partial R}{\partial w} = 0\ , \\[3ex] \dfrac{d^2 . \left(\dfrac{\partial \mathfrak{q}}{\partial w} - \dfrac{\partial \mathfrak{p}}{\partial u}\right)}{dt^2} = \dfrac{\partial Q}{\partial w} - \dfrac{\partial P}{\partial u} = 0\ , \end{cases}$$

welche aussprechen, daß die betreffende Art der einfachen oscillirenden Bewegungen nur dann statthaben kann, wenn die äußeren Componenten R, Q, P durch die Formen:

$$R = \frac{\partial . V(r, u, w)}{\partial r}\ ,\quad Q = \frac{\partial V}{\partial u}\ ,\quad P = \frac{\partial V}{\partial w}\ ,$$

worin $V(r, u, w)$ eine Function der drei als unabhängig geltenden Veränderlichen r, u, w ist, dargestellt werden können, und daß dann die Verschiebungen $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}$ durch die ähnlichen Formen:

$$\mathfrak{r} = \frac{\partial . F_1(r, u, w, t)}{\partial r} \quad , \quad \mathfrak{q} = \frac{\partial F_1}{\partial u} \quad , \quad \mathfrak{p} = \frac{\partial F_1}{\partial w} \qquad (122.$$

ausgedrückt werden, welche, wie es nothwendig ist und man sich leicht überzeugen wird, auch den Bedingungen (B) einfach dadurch genügen, daß durch sie die mit $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{P}$ bezeichneten Ausdrücke (A) selbst Null werden *).

Multiplizirt man sodann die Gleichungen (121) der Reihe nach mit $\frac{\partial r}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$ und nimmt die Summe der sich ergebenden Producte, so folgt mit Berücksichtigung der vorhergehenden Bedingungen

$$\frac{\partial . \frac{d^2 F_1}{d t^2}}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial s} + a^2 \frac{\partial \varrho}{\partial s} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 F_1}{d t^2} = V + a^2 \varrho \ , \qquad (D.$$

und daraus zieht man mit dem Werthe (117) von ϱ, nachdem darin für $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}$ die Werthe (122) eingeführt werden, die charakteristische Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 F_1}{d t^2} &= V + a^2 \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial w^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial F_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_1}{\partial u} \cot \vartheta \right) \\ &= V + a^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial . r^2 \frac{\partial F_1}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial . \frac{\partial F_1}{\partial u} \sin \vartheta}{\partial u} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial w^2} \right) , \end{aligned}\right\} \quad (123.$$

durch welche die Form der Function F_1 bestimmt werden muß.

*) Für diese letztere Substitution muß aber die den Werthen von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{P}$ zu Grunde liegende Abhängigkeit zwischen r, u und w beachtet werden, und es dürfte deßhalb nicht überflüssig sein, sich zu überzeugen, daß die vorhergehenden Schlüsse auch ihre Richtigkeit behalten, wenn man die eigentlich unabhängigen Veränderlichen ϑ und ω für u und w einführt, so daß man nun hat

$$\mathfrak{r} = \frac{\partial f}{\partial r} \ , \quad \mathfrak{q} = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \ , \quad \mathfrak{p} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \omega} \ ,$$

$$R = \frac{\partial V}{\partial r} \ , \quad Q = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \ , \quad P = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \omega} \ .$$

Man wird finden, daß durch diese Formen sowohl die Gleichungen (C) und (D), als die Bedingungen (B), und zwar die Gleichungen (C) mit Berücksichtigung der Gleichungen (121), und die Bedingungen (B) durch $\mathfrak{R} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{P} = 0$ befriedigt werden.

Man erkennt aus dieser Gleichung, daß die Function F_1 in Bezug auf t und w von gleicher Form sein kann, wie die Function F, welche die Gleichung (112) in §. 52 befriedigt, in Bezug auf jede der Veränderlichen x, y, z, daß aber in Bezug auf r, und namentlich in Bezug auf u, ihre Form weniger einfach und weniger leicht zu bestimmen ist. Beschränken wir uns indessen auf den einfachsten Fall kugelförmiger Wellen, für welche F_1 von ϑ oder u und von ω oder w unabhängig ist und bei denen die äußere Kraft vernachlässigt werden kann, die Function V also Null ist, so genügen wir der Gleichung (123) durch die Formen:

$$F_1(r, t) = \frac{1}{r}\,\varphi(kr \pm kat) \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{r}\,\varphi_1(kr)\,\varphi_2(kat) \;,$$

oder allgemeiner

$$F_1(r, t) = \Sigma . \frac{1}{r}\,\varphi(kr \pm kat) \quad \text{oder} \quad = \Sigma . \frac{1}{r}\,\varphi_1(kr)\,\varphi_2(kat) \;,$$

worin aber die mit φ_1 und φ_2 bezeichneten Functionen die Eigenschaft:

$$\frac{d^2 . \varphi(x)}{dx^2} = \pm\,\varphi(x)$$

haben müssen.

Nehmen wir z. B. den einfachsten Fall und setzen

$$F_1(r, t) = \frac{A}{r}\,\sin k(r - at) \;,$$

so erhalten wir vermöge der Beziehungen (122) die Werthe:

$$124^a.)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{r} &= \frac{Ak}{r}\cos k(r - at) - \frac{A}{r^2}\sin k(r - at) \;, \\ \mathfrak{q} &= 0 \;, \quad \mathfrak{p} = 0 \;, \\ \frac{d\mathfrak{r}}{dt} &= \frac{aAk^2}{r}\sin k(r - at) + \frac{aAk}{r^2}\cos k(r - at) = \mathfrak{v} \;, \\ \varrho &= -\frac{Ak^2}{r}\sin k(r - at) \;. \end{aligned}\right.$$

Diese Ausdrücke enthalten die Gesetze derjenigen oscillirenden Bewegung, welche in fortschreitenden kugelförmigen Wellen

der einfachsten Art besteht, und bei welcher die Oscillationen in jedem Punkte **normal zur Oberfläche der Wellen**, oder im Sinne der Fortpflanzung gerichtet sind; denn man schließt aus ihnen

1) daß für ein constantes r und t auch $\mathfrak{r}$ und $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ oder $\mathfrak{v}$ constant ist, daß also alle Punkte, die auf derselben um den Coordinaten-Anfang beschriebenen Kugelfläche liegen, in demselben Augenblicke dieselbe und überall im Sinne des Fahrstrahls oder normal zu dieser Kugelfläche gerichtete Ausweichung und Geschwindigkeit besitzen,

2) daß für ein constantes r die Ausweichung $\mathfrak{r}$ und die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ sich mit der Zeit ändern, aber zwischen gewissen größten absoluten Werthen eingeschlossen bleiben, daß also alle Punkte in der Richtung des Fahrstrahles um eine gewisse Gleichgewichtslage oscilliren, daß aber diese Oscillationen nach einem weniger einfachen Gesetze vor sich gehen, als bei den ebenen fortschreitenden Wellen, welche wir in §. 92 des dritten Buches betrachtet haben, da sie aus zwei einfachen Oscillationen zusammengesetzt sind, welche im Gange um eine Viertel-Schwingung von einander abweichen und verschiedene größte Ausweichungen und Geschwindigkeiten besitzen, daß aber wie bei den ebenen Wellen derselbe Oscillationszustand oder dieselbe **Oscillations-Phase** wieder eintritt, sobald $t' = t + \frac{2\pi}{ka}$ geworden, daß also wie dort $\frac{2\pi}{ka}$ die **Dauer einer ganzen Schwingung** ist,

3) daß für ein constantes t die $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{v}$ mit r sich ändern, daß die Punkte aller Kugelflächen, deren Halbmesser um $\frac{2\pi}{k}$ von einander verschieden sind, sich in demselben Augenblick in derselben **Oscillations-Phase** befinden, daß also $\frac{2\pi}{k}$ die **Wellenlänge** ist, daß aber die größte Ausweichung und die größte Geschwindigkeit mit zunehmendem Halbmesser kleiner werden, indem diese Größen bei der ersten einfachen Oscillation dem Halbmesser r selbst, bei der zweiten dem Quadrat desselben verkehrt proportional sind,

4) daß bei veränderlichem r und t dieselbe Oscillationsphase wiederkehrt, so oft man hat

$$r' - at' = r - at \qquad \text{oder} \qquad r' - r = a(t' - t) \quad ,$$

daß also auch hier, wie bei ebenen Wellen die Oscillationsbewegung gleichförmig mit der Geschwindigkeit a fortgepflanzt wird, aber hier in

der Richtung des Fahrstrahles, also nach allen Richtungen hin, daß sich also diese Bewegung in kugelförmigen Wellen ins Unbegrenzte oder soweit ausbreitet, als die betreffende Flüssigkeit reicht; endlich zeigt

5) der Werth von ϱ, daß auch hier die Bewegung von abwechselnden Verdichtungen und Verdünnungen begleitet ist, daß diese Zustände nur einem einfachen Oscillationsgesetze folgen, nicht wie die Ausweichungen einem zusammengesetzten, und daß sie auch nur im einfachen verkehrten Verhältniß zu dem Halbmesser r stehen.

Bezeichnen wir nun wieder die Wellenlänge $\frac{2\pi}{k}$ mit λ, die Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{k\,a} = \frac{\lambda}{a}$ mit $\mathfrak{t}$, so können wir den Gleichungen (124ª) die Form geben:

$$124^b.)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} = \dfrac{\mathfrak{A}}{r}\left[\cos 2\pi\left(\dfrac{r}{\lambda}-\dfrac{t}{\mathfrak{t}}\right)-\dfrac{\lambda}{2\pi r}\sin 2\pi\left(\dfrac{r}{\lambda}-\dfrac{t}{\mathfrak{t}}\right)\right], \\ \mathfrak{v} = \dfrac{\mathfrak{B}}{r}\left[\sin 2\pi\left(\dfrac{r}{\lambda}-\dfrac{t}{\mathfrak{t}}\right)+\dfrac{\lambda}{2\pi r}\cos 2\pi\left(\dfrac{r}{\lambda}-\dfrac{t}{\mathfrak{t}}\right)\right], \\ \varrho = -\dfrac{\mathfrak{B}}{a\,r}\sin 2\pi\left(\dfrac{r}{\lambda}-\dfrac{t}{\mathfrak{t}}\right), \end{cases}$$

worin $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ für A k und a A k² stehen und aus welcher sogleich hervorgeht, daß wenn $\frac{\lambda}{2\pi r}$ ein sehr kleiner Bruch ist, $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{v}$ durch einfache Oscillationsgesetze dargestellt werden, daß also die Bewegung in Kugel-Wellen derjenigen mit ebenen Wellen in der Form um so näher kommt, je größer r wird, sich aber von dieser wesentlich durch die Abnahme der größten Ausweichung und Vibrationsgeschwindigkeit unterscheidet. Ferner findet man in jenem Falle für die augenblickliche lebendige Kraft eines Punktes auf der Wellenfläche vom Halbmesser r den Ausdruck:

$$q\,\mathfrak{v}^2 = q\,\frac{\mathfrak{B}^2}{r^2}\sin^2 2\pi\left(\frac{r}{\lambda}-\frac{t}{\mathfrak{t}}\right)\ ;$$

die für eine ganze Schwingung sich ergebende lebendige Kraft ist demnach

$$\Sigma_{\mathfrak{t}}\,.\,q\,\mathfrak{v}^2 = q\,\frac{\mathfrak{B}^2}{r^2}\int_0^{\mathfrak{t}} d\,t\,.\,\sin^2 2\pi\left(\frac{r}{\lambda}-\frac{t}{\mathfrak{t}}\right) = \frac{1}{2}\,q\,\frac{\mathfrak{B}^2}{r^2}\,\mathfrak{t}\ ,$$

und daraus folgt als mittlere lebendige Kraft der Oscillationen jenes Punktes

$$q\,\mathfrak{v}_1^2 = \frac{\Sigma_t \cdot q\,\mathfrak{v}^2}{t} = \frac{1}{2}\,q\,\frac{\mathfrak{V}^2}{r^2} \quad ; \qquad (124^c.$$

diese mittlere Intensität der Bewegung ist demnach dem Quadrat des Fahrstrahls oder Halbmessers verkehrt proportional.

Schließlich darf aber nicht unerwähnt gelassen werden, daß mit unsern Gleichungen (124) die dargestellte Wellenbewegung nicht bis zum Coordinaten-Anfang oder bis zum Ursprung der Bewegung rückwärts verfolgt werden kann, da für sehr kleine Werthe von r die $\mathfrak{r}$ sehr groß werden, was gegen die unsern allgemeinen Gleichungen (116) zu Grunde liegende Annahme ist.

Nimmt man für die Function F_1 die Form:

$$F_1\,(r, u, w, t) = \frac{A}{r}\,sin\,k\,r\,cos\,k\,a\,t \;,$$

so erhält man die Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{r} &= \frac{A\,k}{r}\left(cos\,k\,r - \frac{1}{k\,r}\,sin\,k\,r\right) cos\,k\,a\,t \;, \\
\mathfrak{v} &= -\,\frac{a\,A\,k^2}{r}\left(cos\,k\,r - \frac{1}{k\,r}\,sin\,k\,r\right) sin\,k\,a\,t \;, \\
\varrho &= -\,\frac{A\,k^2}{r}\,sin\,k\,r\,cos\,k\,a\,t \;,
\end{aligned}\right\} \qquad (125.$$

welche die Gesetze der oscillirenden Bewegung mit stehenden Kugelwellen und normalen Oscillationen ausdrücken, und aus denen sich dieselben Folgerungen ziehen lassen, wie aus den Gleichungen (124), mit Ausnahme der unter 4) aufgeführten, die sich auf die Fortpflanzung der Bewegung bezieht.

§. 56.

Für die zweite Art der einfachen oscillirenden Bewegungen, nämlich für diejenigen, welche von dem Coeffizienten a unabhängig sind, erhalten wir zunächst die Bedingungen:

$$\frac{\delta\varrho}{\delta r} = 0 \;, \quad \frac{\delta\varrho}{\delta u} = 0 \;, \quad \frac{\delta\varrho}{\delta w} = 0 \;, \quad \varrho = \varrho_0 \qquad (E.$$

und die Gleichungen (119ᵇ) werden damit

$$126.)\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}=R+\frac{b^2}{r\vartheta'}\left(\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial u}-\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial v}\right),\quad \frac{d^2\mathfrak{q}}{dt^2}=Q+\frac{b^2}{r\vartheta'}\left(\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial v}-\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial r}\right),\\ &\qquad\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2}=P+\frac{b^2}{r}\left(\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial r}-\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial u}\right).\end{aligned}\right.$$

Rechnet man dann die Verschiebungen $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$ von dem Zustande an, in welchem die Volumenänderung ϱ_0 schon eingetreten ist, so hat man von da an $\varrho = 0$, also auch

$$r\varrho = r\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial r}+r\frac{\partial\mathfrak{q}}{\partial u}+r\frac{\partial\mathfrak{p}}{\partial w}+2\mathfrak{r}+\mathfrak{q}\cot\vartheta$$

$$=\frac{\partial.r\mathfrak{r}}{\partial r}+\frac{\partial.r\mathfrak{q}}{\partial u}+\frac{\partial.r\mathfrak{p}}{\partial w}+\mathfrak{r}+\mathfrak{q}\cot\vartheta=0$$

und

$$\frac{\partial.r\varrho}{\partial r}=\frac{\partial^2.r\mathfrak{r}}{\partial r^2}+\frac{\partial^2.r\mathfrak{q}}{\partial u\,\partial r}+\frac{\partial^2.r\mathfrak{p}}{\partial w\,\partial r}+\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial r}+\frac{\cot\vartheta}{r}\frac{\partial.r\mathfrak{q}}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial.r\mathfrak{q}}{\partial u}-\frac{1}{r}\frac{\partial.r\mathfrak{p}}{\partial w}-\frac{\mathfrak{q}\cot\vartheta}{r}=0,$$

$$\frac{\partial.r\varrho}{\partial u}=\frac{\partial^2.r\mathfrak{r}}{\partial r\,\partial u}+\frac{\partial^2.r\mathfrak{q}}{\partial u^2}+\frac{\partial^2.r\mathfrak{p}}{\partial w\,\partial u}+\frac{1}{r}\frac{\partial.r\mathfrak{r}}{\partial u}+\frac{1}{r}\frac{\partial.r\mathfrak{q}\cot\vartheta}{\partial u}-\frac{\cot\vartheta}{r}\frac{\partial.r\mathfrak{p}}{\partial w}=0,$$

$$\frac{\partial.r\varrho}{\partial w}=\frac{\partial^2.r\mathfrak{r}}{\partial r\,\partial w}+\frac{\partial^2.r\mathfrak{q}}{\partial u\,\partial w}+\frac{\partial^2.r\mathfrak{p}}{\partial w^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial.r\mathfrak{r}}{\partial w}+\frac{\cot\vartheta}{r}\frac{\partial.r\mathfrak{q}}{\partial w}=0.$$

Damit nehmen die Gleichungen (126) die Form an:

$$126^a.)\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2.r\mathfrak{r}}{dt^2}=Rr+b^2\left(\frac{\partial^2.r\mathfrak{r}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial r\mathfrak{r}}{\partial r}+\frac{\partial^2.r\mathfrak{r}}{\partial u^2}+\frac{\cot\vartheta}{r}\frac{\partial.r\mathfrak{r}}{\partial u}+\frac{\partial^2.r\mathfrak{r}}{\partial w^2}\right),\\ &\frac{d^2.r\mathfrak{q}}{dt^2}=Qr+b^2\left(\frac{\partial^2.r\mathfrak{q}}{\partial r^2}+\frac{\partial^2.r\mathfrak{q}}{\partial u^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial.r\mathfrak{q}\cot\vartheta}{\partial u}+\frac{\partial^2.r\mathfrak{q}}{\partial w^2}\right)\\ &\qquad+\frac{2b^2}{r}\left(\frac{\partial.r\mathfrak{r}}{\partial u}-\cot\vartheta\,\frac{\partial.r\mathfrak{p}}{\partial w}\right),\\ &\frac{d^2.r\mathfrak{p}\vartheta'}{dt^2}=Pr\vartheta'+b^2\left(\frac{\partial^2.r\mathfrak{p}\vartheta'}{\partial r^2}+\frac{\partial^2.r\mathfrak{p}\vartheta'}{\partial u^2}+\frac{\cot\vartheta}{r}\frac{\partial.r\mathfrak{p}\vartheta'}{\partial u}+\frac{\partial^2.r\mathfrak{p}\vartheta'}{\partial w^2}\right)\\ &\qquad+\frac{2b^2}{r}\left(\frac{\partial.r\mathfrak{r}}{\partial w}\sin\vartheta+\frac{\partial.r\mathfrak{q}}{\partial w}\cos\vartheta\right),\end{aligned}\right.$$

und zeigen, daß im Allgemeinen nur die Verschiebung $\mathfrak{r}$ unabhängig von den beiden andern Verschiebungen bestimmt werden kann, und daß das Product r $\mathfrak{r}$ durch eine Function von derselben Form, wie F_1 in der Gleichung (123) dargestellt wird. Nimmt man aber r $\mathfrak{r}$ von u und w, und r $\mathfrak{p}$ und r $\mathfrak{q}$ von w unabhängig an, so können auch die Verschiebungen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}$ unabhängig von den beiden andern bestimmt werden durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2 . r\mathfrak{r}}{dt^2} &= Rr + b^2\left(\frac{\partial^2 . r\mathfrak{r}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial . r\mathfrak{r}}{\partial r}\right) , \\
\frac{d^2 . r\mathfrak{q}}{dt^2} &= Qr + b^2\left(\frac{\partial^2 . r\mathfrak{q}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 . r\mathfrak{q}}{\partial u^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial . r\mathfrak{q}\, cot\,\vartheta}{\partial u}\right) , \\
\frac{d^2 . r\mathfrak{p}\vartheta'}{dt^2} &= Pr\vartheta' + b^2\left(\frac{\partial^2 . r\mathfrak{p}\vartheta'}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 . r\mathfrak{p}\vartheta'}{\partial u^2} + \frac{cot\,\vartheta}{r}\frac{\partial . r\mathfrak{p}\vartheta'}{\partial u}\right) .
\end{aligned}\right\} \quad (127.$$

Die zur Befriedigung dieser Gleichungen dienenden Functionen haben aber auch noch der Bedingung: $\varrho = 0$ zu genügen, welche mit entsprechender Umformung des Werthes (117) von ϱ auf

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial . r^2\mathfrak{r}}{\partial r} + \frac{1}{\vartheta'}\frac{\partial . \mathfrak{q}\vartheta'}{\partial u} + \frac{\partial\mathfrak{p}}{\partial w} = 0$$

oder auch auf

$$\frac{\partial . r^2\mathfrak{r}\vartheta'}{\partial r} + \frac{\partial . r^2\mathfrak{q}\vartheta'}{\partial u} + \frac{\partial . r^2\mathfrak{p}\vartheta'}{\partial w} = 0 \qquad (F.$$

zurückkommt, und daher allgemein befriedigt wird, wenn man

$$\left.\begin{aligned}
r^2\mathfrak{r}\vartheta' = \frac{\partial f_2}{\partial w} - \frac{\partial f_3}{\partial u} , \quad r^2\mathfrak{q}\vartheta' = \frac{\partial f_3}{\partial r} - \frac{\partial f_1}{\partial w} , \\
r^2\mathfrak{p}\vartheta' = \frac{\partial f_1}{\partial u} - \frac{\partial f_2}{\partial r}
\end{aligned}\right\} \quad (128^a.$$

setzt, worin f_1, f_2, f_3 Functionen von t und den drei als gänzlich unabhängig unter sich zu betrachtenden Coordinaten r, u und w vorstellen. Führt man dagegen in die Bedingungsgleichung (F) die eigentlich unabhängigen Veränderlichen ϑ und ω für u und w ein, so wird dieselbe

$$\frac{\partial . r^2\mathfrak{r}\vartheta'}{\partial r} + \frac{\partial . r\mathfrak{q}\vartheta'}{\partial\vartheta} + \frac{\partial . r\mathfrak{p}}{\partial\omega} = 0$$

und daher allgemein befriedigt, wenn

$$128^b.)\left\{\begin{array}{l} r^2\,\mathfrak{r}\,\sin\vartheta = \frac{\delta f_2}{\delta\omega} - \frac{\delta f_3}{\delta\vartheta}\,, \quad r\,\mathfrak{q}\,\sin\vartheta = \frac{\delta f_3}{\delta r} - \frac{\delta f_1}{\delta\omega}\,, \\ r\,\mathfrak{p} = \frac{\delta f_1}{\delta\vartheta} - \frac{\delta f_2}{\delta r}\,, \end{array}\right.$$

worin nun f_1, f_2, f_3 als Functionen von r, ω, ϑ und t zu nehmen sind. Es ist aber auch leicht zu sehen, daß die Gleichung (F) dadurch befriedigt werden kann, daß man $r^2\,\mathfrak{r}$ von r, $\mathfrak{q}\,\vartheta'$ von u oder ϑ und $\mathfrak{p}$ von w oder ω unabhängig werden läßt.

Gibt man dann den Gleichungen (126) die Form:

$$\left\{\begin{array}{l} r^2\,\vartheta'\,\frac{d^2\,\mathfrak{r}}{dt^2} = \frac{d^2.\,r^2\,\mathfrak{r}\,\vartheta'}{dt^2} = R\,r^2\,\vartheta' + b^2\,r\left(\frac{\delta\mathfrak{P}}{\delta u} - \frac{\delta\mathfrak{Q}}{\delta v}\right), \\ r^2\,\vartheta'\,\frac{d^2\mathfrak{q}}{dt^2} = \frac{d^2.\,r^2\,\mathfrak{q}\,\vartheta'}{dt^2} = Q\,r^2\,\vartheta' + b^2\,r\left(\frac{\delta\mathfrak{R}}{\delta v} - \frac{\delta\mathfrak{P}}{\delta r}\right), \\ r^2\,\vartheta'\,\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} = \frac{d^2.\,r^2\,\mathfrak{p}\,\vartheta'}{dt^2} = P\,r^2\,\vartheta' + b^2\,r\,\vartheta'\left(\frac{\delta\mathfrak{Q}}{\delta r} - \frac{\delta\mathfrak{R}}{\delta u}\right), \end{array}\right.$$

differenzirt diese, mit Berücksichtigung der für sie geltenden Abhängigkeit der u und v von r, der Reihe nach in Bezug auf r, u und w oder ϑ' v, und nimmt die Summe der sich ergebenden Aenderungsgesetze, so folgt mit der Bedingungsgleichung (F) die weitere Bedingung:

$$G.)\qquad \frac{\delta.\,R\,r^2\,\vartheta'}{\delta r} + \frac{\delta.\,Q\,r^2\,\vartheta'}{\delta u} + \frac{\delta.\,P\,r^2\,\vartheta'}{\delta w} = 0\,,$$

welcher die Componenten R, Q, P Genüge leisten müssen, wenn die oscillirende Bewegung nur von dem Coeffizienten b^2 abhängen soll, und man genügt dieser Bedingung, ähnlich wie vorher, durch die Formen:

$$H.)\left\{\begin{array}{l} R\,r^2\,\vartheta' = \frac{\delta V_2}{\delta w} - \frac{\delta V_3}{\delta u}\,, \quad Q\,r^2\,\vartheta' = \frac{\delta V_3}{\delta r} - \frac{\delta V_1}{\delta w}\,, \\ P\,r^2\,\vartheta' = \frac{\delta V_1}{\delta u} - \frac{\delta V_2}{\delta r}\,, \end{array}\right.$$

welche den Formen (128^a) entsprechen und worin nun V_1, V_2, V_3 Functionen der unabhängigen Veränderlichen r, u und w allein vorstellen, oder durch die den Gleichungen (128^b) entsprechenden Werthe:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{R\,r^2}\,\vartheta' = \frac{\partial V_2}{\partial \omega} - \frac{\partial V_3}{\partial \vartheta}\,, \quad \mathrm{Q\,r}\,\vartheta' = \frac{\partial V_3}{\partial \mathrm{r}} - \frac{\partial V_1}{\partial \omega}\,, \\ \mathrm{P\,r} = \frac{\partial V_1}{\partial \vartheta} - \frac{\partial V_2}{\partial \mathrm{r}}\,, \end{aligned}\right\} \text{(I.}$$

in welchen V_1, V_2, V_3 Functionen von r, ϑ und ω sind.

Aus den Bestimmungsgleichungen (128^b) zieht man die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{r}\,\mathfrak{r} = \frac{1}{\mathrm{r}\,\vartheta'}\left(\frac{\partial f_2}{\partial \omega} - \frac{\partial f_3}{\partial \vartheta}\right), \quad \mathrm{r}\,\mathfrak{q} = \frac{1}{\vartheta'}\left(\frac{\partial f_3}{\partial \mathrm{r}} - \frac{\partial f_1}{\partial \omega}\right), \\ \mathrm{r}\,\mathfrak{p} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \vartheta} - \frac{\partial f_2}{\partial \mathrm{r}}\right); \end{aligned}\right\} \text{(K.}$$

führt man nun diese und die entsprechenden Werthe (I) in die Gleichungen (126) ein, so kann man denselben auch die Form geben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial.\frac{d^2 f_2}{dt^2}}{\partial \omega} - \frac{\partial.\frac{d^2 f_3}{dt^2}}{\partial \vartheta} = \frac{\partial V_2}{\partial \omega} - \frac{\partial V_3}{\partial \vartheta} + b^2\left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \omega}\right), \\ \frac{\partial.\frac{d^2 f_3}{dt^2}}{\partial \mathrm{r}} - \frac{\partial.\frac{d^2 f_1}{dt^2}}{\partial \omega} = \frac{\partial V_3}{\partial \mathrm{r}} - \frac{\partial V_1}{\partial \omega} + b^2\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \mathrm{r}}\right), \\ \frac{\partial.\frac{d^2 f_1}{dt^2}}{\partial \vartheta} - \frac{\partial.\frac{d^2 f_2}{dt^2}}{\partial \mathrm{r}} = \frac{\partial V_1}{\partial \vartheta} - \frac{\partial V_2}{\partial \mathrm{r}} + b^2\left(\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \mathrm{r}} - \frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \vartheta}\right). \end{aligned}\right\} \text{(L.}$$

Sollen dann aus diesen Gleichungen drei neue hervorgehen, durch welche die Functionen f_1, f_2, f_3 unabhängig von einander bestimmt werden können, so müssen die Differenzen

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \omega}\,, \quad \frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \mathrm{r}}\,, \quad \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \mathrm{r}} - \frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \vartheta}$$

mit den Werthen (128^a) die Formen:

$$\frac{\partial F_2(f_2)}{\partial \omega} - \frac{\partial F_3(f_3)}{\partial \vartheta}\,, \quad \frac{\partial F_3(f_3)}{\partial \mathrm{r}} - \frac{\partial F_1(f_1)}{\partial \omega}\,, \quad \frac{\partial F_1(f_1)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial F_2(f_2)}{\partial \mathrm{r}} \quad \text{(M.}$$

erhalten, damit die Gleichungen (K) auf die Form:

$$\frac{\delta\left(\frac{d^2 f_2}{dt^2} - V_2 - b^2 F_2(f_2)\right)}{\delta\omega} - \frac{\delta\left(\frac{d^2 f_3}{dt^2} - V_3 - b^2 F_3(f_3)\right)}{\delta\vartheta}$$

u. s. f.

gebracht und aus dieser, wie in Buch III, §. 94, die Gleichungen:

$$\text{N.)}\begin{cases} \frac{d^2 f_1}{dt^2} = V_1 + b^2 F_1(f_1) \;,\quad \frac{d^2 f_2}{dt^2} = V_2 + b^2 F_2(f_2) \;, \\ \frac{d^2 f_3}{dt^2} = V_3 + b^2 F_3(f_3) \end{cases}$$

gezogen werden können.

Mit den Werthen (K) erhält man aber aus den Werthen (A) von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{P}$ in §. 54 die neuen Formen:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\vartheta'}\,\frac{\delta\,.\,\frac{1}{\vartheta'}\left(\frac{\delta f_3}{\delta r} - \frac{\delta f_1}{\delta\omega}\right)}{\delta\omega} - \frac{1}{\vartheta'}\,\frac{\delta\,.\,\vartheta'\left(\frac{\delta f_1}{\delta\vartheta} - \frac{\delta f_2}{\delta r}\right)}{\delta\vartheta}$$

$$= \frac{1}{r\vartheta'^2}\left(\frac{\delta^2 f_3}{\delta r\,\delta\omega} - \frac{\delta^2 f_1}{\delta\omega^2}\right) - \frac{1}{r}\left(\frac{\delta^2 f_1}{\delta\vartheta^2} - \frac{\delta^2 f_2}{\delta r\,\delta\vartheta}\right) - \frac{\cot\vartheta}{r}\left(\frac{\delta f_1}{\delta\vartheta} - \frac{\delta f_2}{\delta r}\right),$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{\delta\,.\left(\frac{\delta f_1}{\delta\vartheta} - \frac{\delta f_2}{\delta r}\right)}{\delta r} - \frac{1}{\vartheta'}\,\frac{\delta\,.\,\frac{1}{r^2\vartheta'}\left(\frac{\delta f_2}{\delta\omega} - \frac{\delta f_3}{\delta\vartheta}\right)}{\delta\omega}$$

$$= \frac{\delta^2 f_1}{\delta\vartheta\,\delta r} - \frac{\delta^2 f_2}{\delta r^2} - \frac{1}{r^2\vartheta'^2}\left(\frac{\delta^2 f_2}{\delta\omega^2} - \frac{\delta^2 f_3}{\delta\vartheta\,\delta\omega}\right),$$

$$\mathfrak{P} = \vartheta'\,\frac{\delta\,.\,\frac{1}{r^2\vartheta'}\left(\frac{\delta f_2}{\delta\omega} - \frac{\delta f_3}{\delta\vartheta}\right)}{\delta\vartheta} - \vartheta'\,\frac{\delta\,.\,\frac{1}{\vartheta'}\left(\frac{\delta f_3}{\delta r} - \frac{\delta f_1}{\delta\omega}\right)}{\delta r}$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(\frac{\delta^2 f_2}{\delta\omega\,\delta\vartheta} - \frac{\delta^2 f_3}{\delta\vartheta^2}\right) - \frac{\cot\vartheta}{r^2}\left(\frac{\delta f_2}{\delta\omega} - \frac{\delta f_3}{\delta\vartheta}\right) - \frac{\delta^2 f_3}{\delta r^2} + \frac{\delta^2 f_1}{\delta\omega\,\delta r},$$

und damit ergeben sich die Ausdrücke:

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \omega} = \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial \vartheta^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial . f_2 \cot\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2 \vartheta'^2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial\omega^2}\right)}{\partial\omega}$$

$$- \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f_3}{\partial\vartheta^2} - \frac{\cot\vartheta}{r^2}\frac{\partial f_3}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2\vartheta'^2}\frac{\partial^2 f_3}{\partial\omega^2}\right)}{\partial\vartheta}$$

$$- \frac{2\cos\vartheta}{r^2\sin^3\vartheta}\frac{\partial^2 f_3}{\partial\omega^2} \;,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial w} - \frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial r} = \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f_3}{\partial\vartheta^2} - \frac{\cot\vartheta}{r^2}\frac{\partial f_3}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2\vartheta'^2}\frac{\partial^2 f_3}{\partial\omega^2}\right)}{\partial r}$$

$$- \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial\vartheta^2} + \frac{\cot\vartheta}{r^2}\frac{\partial f_1}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2\vartheta'^2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial\omega^2}\right)}{\partial\omega}$$

$$+ \frac{2\cot\vartheta}{r^2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial r\,\partial\omega} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial^2 f_2}{\partial\omega\,\partial\vartheta} - \frac{2\cot\vartheta}{r^3}\frac{\partial f_2}{\partial\omega} \;,$$

$$\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\vartheta} = \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial\vartheta^2} + \frac{\cot\vartheta}{r^2}\frac{\partial f_1}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2\vartheta'^2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial\omega^2}\right)}{\partial\vartheta}$$

$$- \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial . f_2\cot\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2\vartheta'^2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial\omega^2}\right)}{\partial r}$$

$$- \frac{2}{r^3}\frac{\partial^2 f_2}{\partial\vartheta^2} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial . f_2\cot\vartheta}{\partial\vartheta} - \frac{2}{r^2\vartheta'^2}\frac{\partial^2 f_3}{\partial\vartheta\,\partial\omega} + \frac{2\cot\vartheta}{r^2\vartheta'^2}\frac{\partial^2 f_3}{\partial\omega\,\partial r} \;,$$

welche aber den Formen (M), wie man sieht, nur unter der Bedingung entsprechen, daß man hat

$$\frac{\partial f_2}{\partial\omega} = 0 \;,\quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial\vartheta^2} = 0 \;,\quad \frac{\partial . f_2\cot\vartheta}{\partial\vartheta} = 0 \;,\quad \frac{\partial f_3}{\partial\omega} = 0 \;,$$

daß also f_2 überhaupt Null und f_3 von ω unabhängig ist. Damit kommen die Gleichungen (128^b) auf

$$\mathfrak{r} = -\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial f_3}{\partial\vartheta} \;,\quad \mathfrak{q} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial f_3}{\partial r} - \frac{\partial f_1}{\partial\omega}\right) \;,\quad \mathfrak{p} = \frac{1}{r}\frac{\partial f_1}{\partial\vartheta} \quad (128^c.$$

zurück, und zur Bestimmung der Functionen f_1 und f_3 hat man nach (N) und mit den vorhergehenden Ausdrücken die Bedingungen:

$$129^a.)\begin{cases} \dfrac{d^2 f_1}{dt^2} = V_1 + b^2\left(\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial \vartheta^2} + \dfrac{\cot\vartheta}{r^2}\dfrac{\partial f_1}{\partial \vartheta} + \dfrac{1}{r^2 \vartheta'^2}\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial \omega^2}\right), \\ \dfrac{d^2 f_3}{dt^2} = V_3 + b^2\left(\dfrac{\partial^2 f_3}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f_3}{\partial \vartheta^2} - \dfrac{\cot\vartheta}{r^2}\dfrac{\partial f_3}{\partial \vartheta}\right), \end{cases}$$

oder auch

$$129^b.)\begin{cases} \dfrac{d^2 f_1}{dt^2} = V_1 + b^2\left(\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial r^2} + \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial u^2} + \dfrac{\cot\vartheta}{r}\dfrac{\partial f_1}{\partial u} + \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial w^2}\right), \\ \dfrac{d^2 f_3}{dt^2} = V_3 + b^2\left(\dfrac{\partial^2 f_3}{\partial r^2} + \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial u^2} - \dfrac{\cot\vartheta}{r}\dfrac{\partial f_3}{\partial u}\right), \end{cases}$$

worin aber r, u und w als unabhängige Veränderliche zu behandeln sind.

§. 57.

Den Bedingungen (129^a) genügt man mit Vernachlässigung der äußern Kraft und indem man auch f_1 von ω unabhängig annimmt, am einfachsten durch die Werthe:

$$f_1 = A \,\mathit{logn\,tang}\, \tfrac{1}{2}\vartheta \; \varphi_1(kr \pm kbt) \;,$$

$$f_3 = B \cos\vartheta \; \varphi_3(kr \pm kbt) \;;$$

aus diesen gehen sofort nach (128^c) für $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}$ die Formen:

$$O.)\begin{cases} \mathfrak{r} = \dfrac{B}{r^2}\varphi_3(kr \pm kbt)\;, \quad \mathfrak{q} = \dfrac{B k \cos\vartheta}{r \sin\vartheta}\varphi'_3(kr \pm kbt)\;, \\ \mathfrak{p} = \dfrac{A}{r \sin\vartheta}\varphi_1(kr \pm kbt) \end{cases}$$

hervor, von denen die erste und dritte auch den Gleichungen (127) genügen, die zweite aber nur dann, wenn der Factor $\cos\vartheta$ durch 1 ersetzt wird, was darauf hinauskommt, einfacher

$$f_3 = B\,\varphi_3(kr \pm kbt)$$

zu nehmen. Damit wird dann $\mathfrak{r} = 0$, und es bleiben nur noch die zum Fahrstrahl r senkrechten Verschiebungen:

$$\mathfrak{q}=\frac{B\,k}{r\,sin\,\vartheta}\,\varphi'_3\,(k\,r\pm k\,b\,t)\ ,\quad \mathfrak{p}=\frac{A}{r\,sin\,\vartheta}\,\varphi_1\,(k\,r\pm k\,b\,t)\ .\quad \text{(P.}$$

Diese Verschiebungen können nun nicht auch von ϑ unabhängig werden; da aber nur der Factor der Function, welche das Oscillationsgesetz ausdrückt, mit ϑ veränderlich ist, so werden alle in derselben Entfernung r vom Anfangspunkte sich befindenden Flüssigkeitstheilchen sich gleichzeitig auch in demselben Schwingungszustande befinden, und nur die Intensität der Schwingungen wird mit dem Winkel ϑ veränderlich sein; die Gleichungen (P) drücken also oscillatorische Bewegungen mit kugelförmigen Wellen aus, bei denen die Oscillationsrichtung in der Kugelfläche liegt, bei denen aber die Größe und Geschwindigkeit der Oscillationen vom Aequator an gegen die Pole hin wächst und mit der Entfernung vom Mittelpunkte abnimmt; hier wird demnach die für die Ableitung unserer Gleichungen gestellte Bedingung sehr kleiner Oscillationen durchaus in der Nähe der Achse überschritten, und die Gleichungen (P) können nur den Schwingungszustand in entsprechender Entfernung von der Achse darstellen, wie die Gleichungen (124) auf eine angemessene Entfernung vom Pole beschränkt sind. Auch dürfte dabei nicht überflüssig bemerkt werden, daß die Gleichungen (P) als die einfachsten, welche den allgemeinen Gleichungen (126) genügen, auch schon die einfachste Lage des Coordinatensystems, insbesondere der Polar-Achse voraussetzen.

Als solche spezielle Auflösungen der Gleichungen (126) kann man demnach die Formen:

$$\mathfrak{q}=\frac{\mathfrak{B}}{r\,sin\,\vartheta}\,cos\,k\,(r-b\,t)\ ,\quad \mathfrak{p}=\frac{\mathfrak{C}}{r\,sin\,\vartheta}\,sin\,k\,(r-b\,t)\quad \text{(Q.}$$

nehmen, oder nach Einführung der Wellenlänge λ, und der Schwingungsdauer t,

$$\mathfrak{q}=\frac{\mathfrak{B}}{r\,sin\,\vartheta}\,cos\,2\pi\left(\frac{r}{\lambda}-\frac{t}{t}\right),\quad \mathfrak{p}=\frac{\mathfrak{C}}{r\,sin\,\vartheta}\,sin\,2\pi\left(\frac{r}{\lambda}-\frac{t}{t}\right),\quad \text{(130}^{a}.$$

und hat dann für die Vibrationsintensitäten wieder die Werthe von $\frac{d\mathfrak{q}}{dt}$ und $\frac{d\mathfrak{p}}{dt}$ abzuleiten. Außer diesen Formen genügen aber den Gleichungen auch noch die Werthe von der Form:

$$\mathfrak{q}=\frac{\mathfrak{B}}{r\,sin\,\vartheta}\,cos\,k\,r\,cos\,k\,b\,t\ ,\quad \mathfrak{p}=\frac{\mathfrak{C}}{r\,sin\,\vartheta}\,sin\,k\,r\,cos\,k\,b\,t\ ,\quad \text{(130}^{b}.$$

und andere aus ähnlichen Formen zusammengesetzte Werthe, und man wird aus diesen Gleichungen (130^a) und (130^b) ganz ähnliche Folgerungen ziehen, wie oben aus den Gleichungen (124) und (125).

Annäherungsweise und zwar für verhältnißmäßig große Entfernungen r von dem Vibrations-Mittelpunkte kann zwar auch die Function:

131^a.) $$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{B} \sin \vartheta}{r} \cos(kr \pm kbt)$$

den Gleichungen (126) für $R = Q = P = 0$ und der Bedingung $\varrho = 0$ genügen; denn man erhält damit

$$r\mathfrak{q} \sin\vartheta = \mathfrak{B} \sin^2\vartheta \cos(kr \pm kbt) \quad , \quad \frac{\partial . r\mathfrak{q} \vartheta'}{\partial \vartheta} = \mathfrak{B} \sin 2\vartheta \cos(kr \pm kbt) \; ,$$

und die Bedingung: $\varrho = 0$, welche unter der Voraussetzung: $\mathfrak{p} = 0$, auf

$$0 = \frac{\partial . r^2 \mathfrak{r} \vartheta'}{\partial r} + \frac{\partial . r \mathfrak{q} \vartheta'}{\partial \vartheta}$$

zurückkommt, gibt

$$r^2 \mathfrak{r} \vartheta' = -\int \partial r . \mathfrak{B} \sin 2\vartheta \cos(kr \pm kbt) = -\frac{\mathfrak{B} \sin 2\vartheta}{k} \sin(kr \pm kbt)$$

also

131^b.) $$\mathfrak{r} = -\frac{2\mathfrak{B} \cos\vartheta}{r^2 k} \sin(kr \pm kbt) \; .$$

Man hat ferner

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial \omega} = 0 \quad , \quad \mathfrak{Q} = -\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \omega} = 0 \quad ,$$

$$\mathfrak{P} = \sin\vartheta \left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \vartheta} - \frac{\partial . r\mathfrak{q}}{\partial r} \right) = \mathfrak{B} k \sin^2\vartheta \left(1 + \frac{2}{k^2 r^2}\right) \sin(kr \pm kbt)$$

und folglich

$$\frac{b^2}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \vartheta} = b^2 \frac{2k\mathfrak{B} \cos\vartheta}{r^2} \left(1 + \frac{2}{k^2 r^2}\right) \sin(kr \pm kbt) \; ,$$

$$-\frac{b^2}{r \sin\vartheta} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial r} = -b^2 \frac{k^2 \mathfrak{B} \sin\vartheta}{r} \cos(kr \pm kbt)$$

$$+ 2b^2 \frac{\mathfrak{B} \sin\vartheta}{r^3} \left[\cos(kr \pm kbt) - \frac{4}{kr} \sin(kr \pm kbt) \right] ;$$

mit diesen Werthen wird aber die erste und dritte der Gleichungen (126) vollkommen befriedigt, und in der zweiten bleiben nur Glieder übrig, welche r^3 und r^4 im Nenner haben, welche also für große r und ein großes k oder kleines λ gegen die andern Glieder verschwindend klein werden, ebenso wie der Werth von $\mathfrak{r}$ gegen den von $\mathfrak{q}$, da deren Coefficienten sich ohne Rücksicht auf die Functionen von ϑ verhalten, wie $1 : \frac{\lambda}{\pi r}$. Für große r und sehr kleine λ kann also auch die Function (131[a]) allein als besondere Auflösung unserer Aufgabe zugelassen werden.

§. 58.

Eine einfache oscillirende Bewegung mit kugelförmigen Wellen und normaler Oscillationsrichtung, wie sie durch die Gleichungen (124) dargestellt wird, würde in einer unbegrenzten homogenen Flüssigkeit statthaben, in welcher nur von einem einzigen Orte aus und nur eine solche oscillirende Bewegung hervorgerufen würde. In der nächsten Umgebung des diese Bewegung hervorrufenden Körpers würde zwar auch in diesem Falle die Bewegung der Flüssigkeit noch eine sehr verwickelte sein, was unsere Gleichungen dadurch andeuten, daß sie nicht bis in die Nähe des Mittelpunktes der Kugelwellen gültig sein können, und was auch durch die sichtbare ähnliche Bewegung auf der Oberfläche eines ruhigen Wassers von größerer Ausdehnung bestätigt wird. Denn wir sehen bei einem solchen in der That durch einen hineinfallenden kleinen Körper rings um diesen zunächst eine uns regellos scheinende Bewegung entstehen und aus dieser plötzlich eine geschlossene ringförmige Welle von weit größerem Durchmesser entspringen, welche sich mit einer sehr kleinen aber gleich bleibenden Geschwindigkeit nach allen Richtungen auf der Spiegelfläche des Wassers hin ausbreitet oder fortschreitet und welcher dann von demselben Orte aus noch mehrere andere nachfolgen, bis die Bewegung am Erregungsorte selbst erloschen ist. Wir werden auf diese wegen ihrer Wahrnehmbarkeit durch das Gesicht sehr lehrreiche Bewegung der Spiegelfläche eines ruhigen Wassers später zurückkommen, da sie zu denjenigen oscillirenden Bewegungen gehört, bei welchen die Oscillationen senkrecht zur Fortpflanzung der Bewegung sind. Die durch die Gleichungen (124) dargestellte Bewegung im Innern einer tropfenbildenden oder gasförmigen Flüssigkeit, bei welcher die Oscillationsrichtung mit der Richtung der Fortpflanzung zusammenfällt, können durch das Auge nicht mehr wahrgenommen werden; wir empfinden sie jedoch durch das Ohr als Schall oder Ton, und der

Coefficient a in den Gleichungen (124a) ist hier die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der betreffenden Flüssigkeit.

Diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles kann bei Flüssigkeiten von großer Ausdehnung, wie die atmosphärische Luft und das Wasser, direct beobachtet werden und liefert dann mit andern beobachteten Größen das Mittel, die Coefficienten ε_1 und ε_2 für diese Flüssigkeiten zu bestimmen. Es ist nämlich

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = q_0\, a^2 \quad ,$$

und für die Luft haben wir oben gefunden

$$\varepsilon_1 + 3\,\varepsilon_2 = 3\,P_0 \quad ;$$

daraus folgt also zunächst

$$\varepsilon_2 = \frac{3\,P_0 - q_0\, a^2}{2} \quad , \qquad \varepsilon_1 = \frac{3\,(q_0\, a^2 - P_0)}{2} \quad ,$$

und da man auch hat

$$q_0 = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{P}}\, P_0 = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{P}}\, \frac{P_0}{g} = \frac{P_0}{g\,\mathbf{h}} \quad ,$$

wenn $\mathbf{p}$ das Gewicht der trocknen atmosphärischen Luft bei dem Normaldruck $\mathbf{P}$ und der Temperatur Null bezeichnet und $\mathbf{h}$ eine solche Druckhöhe bedeutet, daß $\mathbf{P} = \mathbf{p}\,\mathbf{h}$ ist, so wird

$$\varepsilon_2 = \frac{3\,P_0}{2}\left(1 - \frac{a^2}{3\,g\,\mathbf{h}}\right) \quad , \qquad \varepsilon_1 = \frac{3\,P_0}{2}\left(\frac{a^2}{g\,\mathbf{h}} - 1\right) \quad .$$

Die zuverlässigsten Versuche über die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft, nämlich diejenigen, welche von den Physikern Moll und v. Beck in Holland angestellt wurden, geben für trockne Luft bei der Temperatur 0° C als wahrscheinlichsten Werth *)

$$a = 332{,}5 \text{ Meter} \quad ;$$

*) Die Herren Moll und v. Beck selbst geben als Mittelwerth aus ihren Versuchen $a = 332{,}^{m}05$; später hat Simons diese Versuche neu berechnet (Poggendorffs Annalen, XIX.), und daraus als Mittelwerth $a = 332{,}^{m}24$ gefunden. Allen diesen Berechnungen liegt aber noch der Gay-Lussac'sche Ausdehnungs-Coefficient 0,00375 zu Grunde; die Zahlen der Tabelle von Simons müssen daher noch mit $\sqrt{\dfrac{1 + 0{,}00375\,t}{1 + 0{,}00367\,t}}$ multiplizirt werden, und der Mittelwerth

nimmt man dann für einen Ort, an welchem $g = 9,^{m}809$ ist, $\mathbf{p} = 1,^{Kgr.}299$, $\mathbf{P} = 10332^{Kgr.}$, so hat man

$$\frac{a^2}{g\,\mathbf{h}} = 1{,}417 \quad , \quad \varepsilon_2 = 0{,}791\,P_0 \quad , \quad \varepsilon_1 = 0{,}626\,P_0 \quad ,$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1{,}417\,P_0 \quad , \quad \frac{1}{3}\,\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1{,}000\,P_0 \quad .$$

Nach den Versuchen von Colladon und Sturm war die Geschwindigkeit des Schalles im Wasser des Genfersee's 1435 Meter; läßt man daher noch die Werthe: $p = 1000^{Kgr.}$ für das Gewicht eines Kubikmeter Wasser, und $g = 9{,}809$ zu, so ergibt sich

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{p}{g}\,a^2 = 209\ 930\ 000^{Kgr.} \quad .$$

Oben haben wir gefunden

$$\frac{1}{3}\,\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 206\ 640\ 000^{Kgr.} \quad ,$$

und damit folgen die Werthe:

$$\varepsilon_1 = 4\ 935\ 000^{Kgr.} \quad , \quad \varepsilon_2 = 204\ 995\ 000^{Kgr.} \quad .$$

Man wird aber leicht einsehen, daß der ebenberechnete Werth von ε_1 noch sehr wenig zuverlässig ist; denn eine kleine Aenderung in dem Coefficienten für die Zusammendrückbarkeit des Wassers bringt eine sehr große Aenderung in dem Werthe von ε_1 hervor. Es genügt z. B. den genannten Coefficienten von 0,000050 auf 0,0000495 herabzusetzen, um mit dem beobachteten Werthe: $a = 1435^{m}$ für ε_1 den viel kleineren Werth 1807500 zu erhalten. Man wird indessen übereinstimmend mit der Natur der Sache soviel daraus zu schließen berechtigt sein, daß bei den tropfenbildenden Flüssigkeiten ε_1 sehr klein ist gegen ε_2, während diese Coefficienten bei der Luft in einem nahe gleichen Verhältnisse stehen, wie bei vulkanisirtem Kautschuk. (Vergl. Bd. III, §. 86, Anm.)

wird nahe $a = 332,^{m}38$. Beachtet man dann, daß die einzelnen Versuchswerthe zwischen 328,4 und 338,1 liegen, also in den äußersten um fast 2 Prozent vom Mittel abweichen, so wird man den Werth $a = 332,^{m}5$ für hinreichend genau und wahrscheinlich annehmen können.

§. 59.

Nach der bisher geltenden Theorie wurde der aus der Compression der Flüssigkeiten sich ergebende Coefficient $\varepsilon_2 + \frac{1}{3}\varepsilon_1$ für $\varepsilon_2 + \varepsilon_1$ genommen; diese Theorie mußte deßhalb nothwendig die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles zu klein geben. Bei den tropfenbildenden Flüssigkeiten, für welche übrigens der ebenerwähnte Versuch von Colladon und Sturm allein zu stehen scheint, ist der Unterschied wegen des kleinen Werthes von $\frac{2}{3}\varepsilon_1$ gegen $\varepsilon_2 + \frac{1}{3}\varepsilon_1$ freilich so klein, daß er den Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden kann*). Bei der Luft dagegen, bei welcher nach jener Theorie und unserer obigen Bezeichnung $a^2 = g\,\mathfrak{h}$ sein sollte, während die angeführten Versuche $a^2 = 1{,}417\,g\,\mathfrak{h}$ ergeben haben, beträgt der Unterschied 16 Prozent oder fast $\frac{1}{6}$ der beobachteten Geschwindigkeit; es konnte daher in Beziehung auf die Luft kein Zweifel über die Mangelhaftigkeit der Theorie bestehen, und es wurden deßhalb auch schon seit der Begründung dieser Theorie durch Newton verschiedene Versuche gemacht, jenen Mangel zu verbessern; allgemeine Anerkennung fand aber nur die Verbesserung von Laplace. Dieser glaubte die Ursache jenes Mangels darin zu finden, daß durch die mit den Schallschwingungen verbundenen Verdichtungen Wärme frei, durch die darauf folgenden Verdünnungen Wärme gebunden werde, und daß dadurch die Spannung der Luft in einem stärkeren Verhältnisse, als nach dem einfachen Mariotte'schen Gesetze, mit den Verdichtungen und Verdünnungen wachsen und abnehmen müsse, obgleich die Temperatur der Luft im Ganzen wegen der raschen Aufeinanderfolge der Verdichtungen und Verdünnungen nicht geändert werde. Auf diese Voraussetzung gestützt, leitet derselbe mittels Betrachtungen, auf die hier nicht weiter eingegangen werden könnte, ohne auch das Wesen der Wärme näher zu erörtern, den weiteren Satz ab, daß durch jene Wärmeentwickelung die Spannung der Luft in dem Verhältnisse ihrer beiden Wärmecapacitäten bei constantem Druck und constantem Volumen vermehrt werde, und gelangt dann von der auf einer besondern Voraussetzung über die Natur der Bewegung beruhenden Gleichung (64) in §. 32 ausgehend, zu dem Schlusse, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit a nicht $= \sqrt{g\,\mathfrak{h}}$ sondern $= \sqrt{g\,\mathfrak{h}\,\frac{c}{c'}}$ sei, wenn c und c'

*) Die genannten Physiker berechnen die Schallgeschwindigkeit für das Wasser des Genfersee's nach der Theorie zu 1428m, was allerdings nur um $\frac{1}{200}$ von der beobachteten Geschwindigkeit abweicht.

die beiden genannten Wärmecapacitäten bezeichnen. Abgesehen aber von den Einwänden, welche sich von Seite der Mechanik gegen die Zulässigkeit der unter gänzlicher Vernachlässigung der verschiebenden Spannungen S und unter einer besondern Voraussetzung über die Geschwindigkeitscomponenten eines Punktes abgeleiteten Gleichung (64) und von Seite der Wärmetheorie gegen die Begründung des Satzes erheben lassen, daß die aus der Wärmeentwickelung entspringende Vermehrung der Spannung dem Quotienten der beiden Wärmecapacitäten proportional ist, abgesehen von den Bedenken, welche schon vom Standpunkte der Molecular-Physik aus gegen die Zulassung der Hypothese entstehen, daß bei so kleinen Schwingungen, bei welchen die einzelnen Gasmoleküle die gegenseitigen Gleichgewichtsgrenzen nicht überschreiten, überhaupt eine Wärmeentwickelung stattfindet, und daß die bei jenen Schwingungen statthabenden Verdichtungen und Verdünnungen mit wahrnehmbaren Compressionen und Extensionen verglichen werden können, endlich abgesehen von der geringen Zuverlässigkeit (sowohl in theoretischer als praktischer Hinsicht) jener Versuche, durch welche man den Coefficienten $\frac{c}{c'}$ direct bestimmen zu können meinte, und von der nicht allzugroßen Uebereinstimmung des so gefundenen Werthes:

$$\frac{c}{c'} = 1{,}348 \quad \text{bis} \quad 1{,}375$$

mit dem nach der Laplace'schen Theorie aus der Schallgeschwindigkeit abgeleiteten:

$$\frac{c}{c'} = \frac{a^2}{g\,h} = 1{,}417 \quad ,$$

dürfte es genügen, Folgendes zu erwägen, um sich von der Unzulässigkeit dieser Theorie zu überzeugen.

Es liegt in der Natur der Sache und folgt aus allen unsern Untersuchungen in diesem und dem vorhergehenden Buche, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit schwingender Bewegungen in irgend einem Mittel nur von der Elasticität dieses Mittels in seinem Gleichgewichtszustande abhängen und nicht durch die aus den Schwingungen selbst entspringenden örtlich und zeitlich vorübergehenden Spannungen, die je nach der Intensität dieser Schwingungen bald größer bald kleiner sind, vermehrt oder vermindert werden kann, da in diesem Falle die schwingende Bewegung in ihrer Fortpflanzung durch sich selbst beschleunigt oder verzögert würde. Die Laplace'sche

Theorie geht aber noch weiter, indem sie durch die oscillirende Bewegung eine Arbeit, die **Wärmeerzeugung**, leisten läßt, **ohne daß ein entsprechender Verlust an lebendiger Kraft stattfindet**, und diese Arbeit zur Vermehrung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit verwendet; **diese Theorie läßt also durch einen noch verwickelteren Proceß aus der schwingenden Bewegung selbst eine Ursache für die Vermehrung ihrer eigenen Fortpflanzungsgeschwindigkeit entstehen!**

Die Aenderung der Spannung, welche zwischen den in Schwingung begriffenen Theilchen eintritt, kann nur Einfluß haben auf das Gesetz, nach welchem diese Theilchen **um ihre Gleichgewichtslage** schwingen, weil von dieser Aenderung nothwendig die Größe der Resultirenden abhängt, welche das schwingende Theilchen in seine Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt und in Verbindung mit den anfänglichen Zuständen die Schwingungsdauer desselben bestimmt, während umgekehrt die größere oder geringere Spannung des ganzen Mittels in seinem innern Gleichgewichtszustand gar keinen Einfluß auf die schwingende Bewegung selbst und namentlich keinen auf die Schwingungsdauer ausüben kann *). Die Fortpflanzung der oscillirenden Bewegung dagegen besteht in einer Uebertragung dieser Bewegung von einem materiellen Punkt auf einen folgenden, wie bei dem centralen Stoß vollkommen elastischer Kugeln, und die Geschwindigkeit dieser Uebertragung hängt nicht von der Spannung zwischen den Theilchen ab, welche schon in Vibration begriffen sind, sondern hauptsächlich und nur von der Spannung zwischen diesen und den noch in Ruhe befindlichen, oder mit andern Worten von **der zwischen den materiellen Theilchen im Gleichgewichtszustande herrschenden Spannung**. Die Laplace'sche Theorie für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles steht demnach im Widerspruch mit den allgemeinen mechanischen Gesetzen und kann ferner nicht mehr als richtig anerkannt und zugelassen werden.

§. 60.

Es kann hier nicht in die eigentliche Akustik eingegangen werden, wir müssen uns deßhalb hinsichtlich der Anwendung der Gleichungen (124ᵃ) auf diesen Zweig der Physik auf die Bemerkung beschränken,

*) Deßhalb macht auch die Mitte einer cylindrischen Spiralfeder immer in derselben Zeit gleichviel Schwingungen, ob die Enden derselben ohne Spannung der Feder blos festgehalten werden, oder ob diese durch Zusammendrücken oder Auseinanderziehen gespannt wird.

daß die Intensität des Schalles in der That dem Quadrat der Entfernung von der Erregungsquelle verkehrt proportional ist, wie es die Beziehung (124^c) in §. 55 verlangt; wir müssen aber noch darauf hindeuten, daß auch die Gleichungen (111) und insbesondere die aus diesen hervorgehenden:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{x} = \mathfrak{A}\, cos\, kx\, cos\, kat \;, & \mathfrak{v} = -\,\mathfrak{B}\, cos\, kx\, sin\, kat \;, \\ \mathfrak{y} = 0 \;, & \mathfrak{z} = 0 \;, \end{array}\right\} \quad (R.$$

denen ähnliche schon in den §§. 92 und 93 des vorhergehenden Buches abgeleitet wurden und welche eine schwingende Bewegung in ebenen stehenden Wellen ausdrücken, bei den Schallbewegungen Anwendung finden, und zwar bei der Tonerregung durch Oscillation der Luft in prismatischen Kanälen, wie es bei den Pfeifen der Fall ist. Gewöhnlich wird an dem einen Ende eines solchen Kanales die Vibration durch einen Luftstrom direct oder mittels vibrirenden Blättchen eingeleitet und es bilden sich von da aus stehende ebene Wellen mit festen Knoten-Ebenen, welche unter sich um eine halbe Wellenlänge entfernt sind, und von denen die erste um eine Viertel-Wellenlänge von der Erregungsstelle absteht, da an dieser, wo die Luft des Kanales mit der äußern Luft in Berührung steht, keine Verdichtung oder Verdünnung statt haben kann. Die Gleichungen (R) entsprechen daher der Voraussetzung, daß die x von der Erregungsstelle an gezählt werden; denn man hat darnach

$$\varrho = \frac{\delta \mathfrak{x}}{\delta x} = -\,\mathfrak{A}\, k\, sin\, kx\, cos\, kat \;,$$

also $\varrho = 0$ für $x = 0$. Ist dann der Kanal auch am entgegengesetzten Ende offen, und L die Länge desselben, so muß man auch haben: $\varrho = 0$ für $x = L$, also $sin\, kL = 0$, $kL = i\pi$, und die Gleichungen (R) nehmen die Form an:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\, cos\, i\pi \frac{x}{L}\, cos\, i\pi \frac{at}{L} \;, \quad \mathfrak{v} = -\,\mathfrak{B}\, cos\, i\pi \frac{x}{L}\, sin\, i\pi \frac{at}{L} \;. \quad (S.$$

Ist dagegen der Kanal an dem der Erregungsstelle entgegengesetzten Ende geschlossen, so wird dieses Ende eine Knotenebene und man hat $sin\, kL = \pm 1$, $kL = \frac{2i+1}{2}\pi$,

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\, cos\, \frac{2i+1}{2}\pi \frac{x}{L}\, cos\, \frac{2i+1}{2}\pi \frac{at}{L} \;, \quad \text{u. s. f.} \quad (T.$$

Man hat aber auch, wenn $\lambda = 2l$ die Wellenlänge und l den Abstand zweier Knotenebenen bezeichnet,

$$\xi = \mathfrak{A} \cos \pi \frac{x}{l} \cos \pi \frac{at}{l} = \mathfrak{A} \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{at}{\lambda}$$

und für die Schwingungsdauer den Werth

$$t = \frac{\lambda}{a} = \frac{2l}{a} \quad .$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit (S) und (T), so ergeben sich für die Wellenlängen der in einer offenen Pfeife von der Länge L erzeugten Töne die Werthe

$$\lambda = \frac{2L}{i}\ , \quad \lambda = 2L\ , \quad = L\ , \quad = \frac{2}{3}L\ , \quad = \frac{1}{2}L\ , \quad \text{u. s. f.}$$

der tiefste oder Grundton einer solchen Pfeife hat also die doppelte Länge derselben zur Wellenlänge, dann folgt die Octav dieses Tones, die Quinte dieser Octav, die zweite Octav, u. s. f. Für eine geschlossene (gedackte) Pfeife hat man dagegen

$$\lambda = \frac{4L}{2i+1}\ , \quad \lambda = 4L\ , \quad = \frac{4}{3}L\ , \quad = \frac{4}{5}L\ , \quad \text{u. s. f.}$$

die Wellenlänge des Grundtones ist nun der vierfachen Pfeifenlänge gleich, und diesem folgt sogleich die Quint von der Octav, dann die Terz von der zweiten Octav, u. s. f., da sich hier die Schwingungszahlen $n = \frac{1}{t} = \frac{a}{\lambda}$ wie die ungeraden Zahlen verhalten, während sie bei der offenen Pfeife als Vielfache der Zahlen 1, 2, 3, 4, etc. aufeinanderfolgen.

Die geschlossene Pfeife stimmt also in der Aufeinanderfolge der Töne mit dem am Ende befestigten und longitudinal-schwingenden Stabe (Buch III, §. 93.) überein; sie unterscheidet sich aber wesentlich von diesem durch den Coefficienten a, welcher die Fortpflanzungs-Geschwindigkeit laufender Wellen in einem solchen Kanale ausdrückt, und der hier derselbe bleibt, wie bei der Wellenbewegung in der unbegrenzten Luft, wenn der Kanal auf den Seiten seiner ganzen Länge nach luftdicht geschlossen ist und seine Wände einerseits so viel Festigkeit besitzen, daß sie bei Aenderungen der Luftspannung in dem Kanal nicht nachgeben und anderseits hinreichend glatt sind, damit sie die Oscillationen

der Luft nicht verzögern. Denn unter diesen Voraussetzungen kann die Luftsäule im Kanal alle die verschiedenen Spannungen annehmen, welche der Schwingungsbewegung in ebenen Wellen zukommen müssen, und für welche man nach den Gleichungen (108) in §. 51 im jetzigen Falle die Werthe erhält:

$$T_x = P_0 - 2\pi\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\,\frac{\mathfrak{R}}{\lambda}\,\sin 2\pi\,\frac{x}{\lambda}\,\cos 2\pi\,\frac{t}{\mathfrak{t}}\quad,$$

$$T_y = T_z = P_0 - 2\pi\,\varepsilon_2\,\frac{\mathfrak{R}}{\lambda}\,\sin 2\pi\,\frac{x}{\lambda}\,\cos 2\pi\,\frac{t}{\mathfrak{t}}\quad,$$

$$S_z = S_y = S_x = 0\quad,$$

wenn P_0 die Spannung der äußern Luft bezeichnet, wobei man sich überdieß leicht überzeugen wird, daß diese Spannungen immer dasselbe Zeichen wie P_0 haben müssen, da ε_2 immer kleiner, und $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ nur wenig größer ist, als P_0, während der Quotient $\frac{\mathfrak{R}}{\lambda}$ viel kleiner bleibt, als 1. Es müssen also hier nicht, wie bei dem longitudinal-schwingenden Stab, zugleich mit den longitudinalen Schwingungen auch seitliche Bewegungen statt haben, durch welche, wie in §. 93 des vorhergehenden Buches gezeigt wurde, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wesentlich vermindert wird; sondern es entstehen hier reine ebene Wellen, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit, wie bei den Kugelwellen in der unbegrenzten Luft durch den Ausdruck:

$$a = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{q}}$$

gegeben wird. Ist demnach t_0 die Schwingungsdauer und n_0 die Zahl der Schwingungen in der Zeiteinheit für den Grundton einer offenen Pfeife von der Länge L, so hat man für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft auch den Werth:

$$a = \frac{2L}{t_0} = 2\,n_0\,L\quad,$$

welcher mit dem Ergebniß der oben angegebenen directen Versuche sehr nahe übereinstimmt.

§. 61.

Als Beispiel einer Bewegung, bei welcher die Oscillationen senkrecht zur Fortpflanzung gerichtet sind, bietet sich uns zunächst die für

uns sehr lehrreiche Bewegung in kreisförmigen Wellen auf der Oberfläche einer schweren Flüssigkeit dar. Wenn in irgend einem Punkt der Spiegelfläche einer solchen Flüssigkeit eine zur Spiegelfläche senkrechte Bewegung veranlaßt wird, so tritt zuerst und zunächst um diesen Punkt eine für unsere Wahrnehmung sehr unregelmäßige Bewegung ein; aber nach einer sehr kurzen Zeit entspringt aus dieser eine geschlossene kreisförmige Welle von viel größerem Durchmesser als die horizontale Ausdehnung der unmittelbar in Bewegung gesetzten Flüssigkeitstheilchen, diese Welle dehnt sich scheinbar nach allen Richtungen aus, und dicht anschließend folgen ihr von demselben Orte aus noch mehrere andere nach, die sich mit ihr bis an die Grenzen der Spiegelfläche hin ausbreiten, und von da zurückgeworfen und immer schwächer werdend aber nicht mehr als geschlossene Kreise gegen die Erregungsstelle zurückkehren, sich durchkreuzen und allmählig verschwinden. An der Erregungsstelle selbst kommt die Flüssigkeit sehr bald, nachdem sich etwa vier bis fünf Wellenringe gebildet haben, zur Ruhe und die Spiegelfläche erscheint innerhalb des sich ausbreitenden Wellensystems als horizontale Kreisebene, bis die an den Grenzen der Spiegelfläche reflectirten Wellen diese Ruhe noch einmal für eine kurze Zeit stören. Durch kleine, auf der Oberfläche der Flüssigkeit schwimmende Körper überzeugt man sich, daß die Wellen durch ein Erheben und Sinken der Flüssigkeitstheilchen gebildet werden, und daß das scheinbare Fortschreiten der Wellenringe in einer radialen Fortpflanzung dieser verticalen oscillirenden Bewegung besteht, bei welcher die Größe der Ausweichung aus der Gleichgewichtslage immer kleiner wird, und sehr wahrscheinlich dem Durchmesser des Wellenringes verkehrt proportional ist.

Diese Erscheinung ist in mehrfacher Beziehung lehrreich; erstens dadurch, daß sie für die Flüssigkeiten die Möglichkeit und die Existenz einer oscillirenden Bewegung anschaulich macht, bei welcher die Oscillationen senkrecht zur Fortpflanzung gerichtet sind; zweitens dadurch, daß sie gestattet direct zu beobachten, was an der und um die Erregungsstelle vor sich geht, namentlich, daß die regelmäßige oscillirende Bewegung erst in einiger Entfernung von der Erregungsstelle beginnt, wahrscheinlich dann, wenn die Bewegungsgrößen der Flüssigkeitstheilchen in eine Art Gleichgewicht gekommen sind, und drittens dadurch, daß wir hier unmittelbar beobachten können, was übrigens ebensowohl aus den Wahrnehmungen bei der Tonerregung geschlossen werden kann, daß die oscillirende Bewegung auch bei den Flüssigkeiten und bei diesen selbst noch viel schneller, als bei den festen Körpern, erstirbt, wenn die erregende Ursache zu wirken aufgehört hat.

Leider sind wir aber noch weit entfernt, diese oscillirende Bewegung einer schweren Flüssigkeit, welche offenbar nicht bloß an der Oberfläche existirt, sondern nothwendig auch weiter in die Tiefe fortwirkt, genügend analytisch ausdrücken zu können. Die Bewegung an der Oberfläche selbst wird zwar durch die Gleichung:

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{B}}{r} \sin 2\pi \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{b\,t}{\lambda}\right) \quad ,$$

welche aus (130ᵃ) oder (131ᵃ) hervorgeht, wenn man darin $\sin\vartheta = 1$ setzt, dargestellt; es ist aber mehr als wahrscheinlich, daß weder die Gleichung:

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{B}}{r \sin\vartheta} \sin 2\pi \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{b\,t}{\lambda}\right)$$

noch die Gleichung:

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{B} \sin\vartheta}{r} \sin 2\pi \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{b\,t}{\lambda}\right)$$

die Bewegung der Flüssigkeit unter der Oberfläche ausdrückt, wenn der Winkel ϑ von der Verticalen im Erregungspunkte gezählt wird. Außerdem ist aber auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit b jener Bewegung an der Oberfläche wesentlich von dem Coefficienten für die Fortpflanzung in der unbegrenzten Flüssigkeit verschieden; denn wenn wir auch für Wasser den Elasticitäts-Coefficienten ε_1 nur zu $2000000^{\text{Kgr.}}$ annehmen so wird

$$b^2 = \frac{\varepsilon_1}{2\,\mathfrak{q}} = 1000\,g \qquad \text{und} \qquad b = 99{,}04 \text{ Meter} \quad ,$$

während die Fortpflanzung der kreisförmigen Wellen an der Spiegelfläche eines stehenden Wassers kaum einige Meter beträgt. Diese Bewegung scheint demnach durch die Beschränkungen an den festen Grenzen der Flüssigkeit einem viel complicirteren Gesetze zu folgen, als eine ähnliche oscillirende Bewegung in der unbegrenzten Flüssigkeit, was zum Theil davon herrühren dürfte, daß die Bedingungsgleichung (G) in §. 56, worin für den jetzigen Fall $R = P = 0$, $Q = g$ zu nehmen ist, nur für die Oberfläche oder $\cos\vartheta = 0$ befriedigt wird, was aber auch damit zusammenzuhängen scheint, daß unsere Gleichungen (126) auch eine Bewegung in der unbegrenzten Flüssigkeit kaum genügend darzustellen vermögen und daß alle unsere Gleichungen für oscillirende Bewegungen in Flüssigkeiten oder festen Körpern noch darin völlig

ungenügend sind, daß sie nur einen fortdauernden oscillirenden Bewegungszustand darstellen, daß es noch nicht gelungen ist, die nur in einer oder mehreren Wellen sich fortpflanzende und an festen Körpern mit entgegengesetzter Vibration reflectirende Bewegung in einer Gleichung auszudrücken, und daß in allen jenen Gleichungen nicht der geringste Grund für das Aufhören der oscillirenden Bewegung überhaupt und noch weniger für das schnelle Aufhören in den Flüssigkeiten und Gasen zu finden ist. (Man vergl. Buch III, §. 75, vorletzten Absatz.)

Wir kennen bis jetzt keine Erscheinung, welche auf eine oscillirende Bewegung der Luft mit transversalen Vibrationen der Lufttheilchen schließen läßt; vielleicht fehlen uns die entsprechenden Organe, um sie wahrzunehmen. In der Optik aber ist man zu der Ueberzeugung gelangt, daß die Empfindung des Lichtes in der Wahrnehmung oscillirender Bewegungen einer sehr elastischen Flüssigkeit, des Aethers, besteht, bei welchen die Vibrationen senkrecht zur Fortpflanzung gerichtet sind, und man hat einen thatsächlichen Grund für diese letztere Annahme darin, daß sich die Lichtvibrationen nach zwei unter sich rechtwinkligen Richtungen zerlegen lassen, von denen jede zur Fortpflanzungsrichtung (dem Lichtstrahl) senkrecht ist, und daß umgekehrt Vibrationen von gleicher Schwingungsdauer, welche nach verschiedenen zur Fortpflanzung senkrechten Richtungen statthaben, durch Zerlegen und Zusammensetzen, wie Kräfte in einer Ebene, zu einer einzigen Vibration von derselben Schwingungsdauer vereinigt werden können.

Für eine einfache Oscillations-Bewegung des Aethers genügen der Optik die einfachen Gleichungen:

$$132.)\quad \mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{B}}{r} \cos 2\pi\left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{\mathrm{t}}\right), \quad \mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{q}}{dt} = \frac{\mathfrak{B}}{r} \sin 2\pi\left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{\mathrm{t}}\right),$$

für die Ausweichung eines Aethertheilchens aus der Gleichgewichtslage und seine Vibrationsgeschwindigkeit, und sie läßt es ganz unentschieden, wie sich diese Größen mit dem Winkel ϑ ändern, da die meisten optischen Erscheinungen, welche zur Prüfung und Bestimmung der Theorie dienen, einen so kleinen Theil einer Kugelfläche, einer vom leuchtenden Punkt ausgehenden Kugelwelle, umfassen, daß innerhalb dieses Theiles der Winkel ϑ als constant anzunehmen ist, und weil auf der andern Seite angenommen werden muß, daß ein sogenannter leuchtender Punkt aus sehr vielen leuchtenden Punkten besteht, welche nach verschiedenen Richtungen hin vibriren, daß also das Auge in einer andern Stellung zu dem zusammengesetzten leuchtenden Punkte auch die Vibrationen

anderer einfachen leuchtenden Punkte wahrnimmt. Man kann aber nicht wohl zulassen, daß die von einem einfachen leuchtenden Punkte erregten einfachen Oscillationen durch die erste der oben gefundenen Gleichungen (130), nämlich

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{B}}{r \sin \vartheta} \cos 2\pi \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{\mathfrak{t}} \right)$$

dargestellt werden, indem man die Polarachse, von welcher aus die Winkel ϑ gerechnet werden in der Richtung der Vibration des einfachen leuchtenden Punktes annimmt, da darnach die Vibrationsgeschwindigkeit und demnach auch die Lichtintensität, welche wie beim Schall dem Quadrat dieser Vibrationsgeschwindigkeit proportional ist, in der Nähe der Polarachse unendlich-groß werden müßten; viel eher könnte man sich zu der Gleichung (131ª):

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{B} \sin \vartheta}{r} \cos 2\pi \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{\mathfrak{t}} \right)$$

verstehen, da nach dieser die Vibrationsgeschwindigkeit im Aequator am größten ist, und von da gegen die Achse wie der Sinus des Winkels ϑ abnimmt, wo die verschwindende Lichtintensität durch die anderer einfachen Punkte, welche senkrecht oder in nahe senkrechten Richtungen gegen jene Achse schwingen, in deren Aequator also diese Achse liegt, ersetzt wird. Allein die eben genannte Gleichung läßt sich, wie wir oben gesehen haben, nicht streng mit den allgemeinen Bewegungsgesetzen (126) vereinigen, wenn man auch zugeben wollte, daß die mit ihr nothwendig auftretende, in die Richtung des Fahrstrahles fallende Vibrationscomponente:

$$\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{A}}{r^2} \cos \vartheta \sin 2\pi \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{\mathfrak{t}} \right),$$

welche ohnehin dem Quadrat des Fahrstrahles verkehrt proportional ist, für das Auge nicht wahrnehmbar sei.

Nach den vorhergehenden Erörterungen scheint es mir nicht leicht zu sein, die in der Optik geltenden Annahmen über die Natur der Lichtvibrationen mit unsern allgemeinen Gesetzen der oscillirenden Bewegungen einer Flüssigkeit in genügende Uebereinstimmung zu bringen; ich schließe daher diesen Gegenstand mit folgenden Bemerkungen.

Ein Lichtstrahl ist eine im Sinne der Licht-Fortpflanzung gebildete Reihe von Aethertheilchen, welche alle nach demselben Gesetze oscilliren; wird dieses Gesetz durch die einfache Gleichung (132) dar-

gestellt, so heißt der Lichtstrahl ein geradlinig polarisirter, weil jedes Aethertheilchen bei seinen Oscillationen eine durch seine Gleichgewichtslage gehende gerade Linie beschreibt. Wird jenes Gesetz dagegen durch zwei Gleichungen von der Form der Gleichungen (130) ausgedrückt, welche für $\sin\vartheta = 1$ oder im Aequator der Wellenfläche auf

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{B}}{r} \sin 2\pi \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{\mathfrak{t}}\right) \quad , \quad \mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{C}}{r} \cos 2\pi \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{\mathfrak{t}}\right)$$

zurückkommen und die für ein und dasselbe Aethertheilchen, also für ein constantes r mit den Gleichungen (C) in §. 84 des ersten Buches übereinstimmen, so wird der Lichtstrahl ein elliptisch-polarisirter genannt, da nun jedes Aethertheilchen sich in einer Ellipse um seine Gleichgewichtslage bewegt; diese Bewegung wird eine kreisförmige, wenn $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ wird, und der Lichtstrahl ist dann kreisförmig polarisirt.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $b = \frac{\lambda}{\mathfrak{t}}$ ist für die Lichtvibrationen eine außerordentlich große; sie ist fast 41200 deutsche Meilen oder 301 000 000 Meter, also fast millionmal so groß als die Schallgeschwindigkeit und zwingt uns zu Annahmen über die Eigenschaften des Aethers, welche unser Vorstellungsvermögen weit überschreiten; denn es muß darnach für den Aether im Weltraume $\frac{\varepsilon_1}{2q}$ fast billion-mal so groß sein, als der Quotient $\frac{\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2}{q'}$ für die Luft; nehmen wir demnach für den Aether $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{3}{4} P_0$ (§. 51), also $\frac{\varepsilon_1}{2} = \frac{3}{8} P_0$, so haben wir

$$\frac{P_0}{q} = 800\,000\,000\,000 \, \frac{8}{3} \, . \, 1{,}417 \, \frac{P'_0}{q'}$$
$$= 3\,000\,000\,000\,000 \, \frac{P'_0}{q'} \quad ,$$

und wenn wir daher die Dichte q des Aethers im Weltraume auch 3 000 000 mal kleiner nehmen, als die Dichte q' der Luft, so müssen wir die Spannung P_0 des Aethers im Weltraum doch noch 1 000 000 mal so groß annehmen, als die Spannung P'_0 unserer Luft, oder wir müssen zulassen, daß der Aether bei einer Spannung von 1 Million Atmosphären, bei welcher die atmosphärische Luft auch ohne Temperatur-

verminderung längst in den tropfenbildenden Flüssigkeitszustand übergegangen wäre, nur eine Dichte besitzt, welche noch weit unter dem ist, was wir als leeren Raum herzustellen vermögen. Fast noch staunenswerthere Ergebnisse folgen aber aus der Vergleichung jener großen Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der kleinen Wellenlänge der Lichtvibrationen, die aus vielen Erscheinungen direct bestimmt werden kann; denn diese beträgt bei dem rothen Lichte, bei welchem sie am größten sind, nur nahe 0,00070 Millimeter, bei dem violetten Lichte, wo sie am kleinsten sind, nahe 0,00035 oder halb so viel Millimeter; folglich ist die Schwingungsdauer $t = \frac{\lambda}{b}$ für rothe Vibrationen

$$\frac{0{,}00070}{301\ 000\ 000\ 000} \quad \text{oder ungefähr} \quad \frac{1}{400\ 000\ 000\ 000\ 000},$$

d. h. ein Aethertheilchen, welches rothes Licht fortpflanzt, schwingt in einer Sekunde 400 billionen-mal *)!

§. 62.

Was endlich die zusammengesetzten Bewegungen betrifft, so ist dem, was in §. 96 des vorhergehenden Buches darüber und über die allgemeinste Auflösung der Gleichungen (109) gesagt wurde, für die Flüssigkeiten noch eine Folgerung beizufügen, welche zwar im Grunde eine ganz allgemeine, für jedes veränderliche System gültige ist, die aber für die Flüssigkeiten viel mehr Wichtigkeit hat, weil sie hier, namentlich in der Akustik und Optik, eine sehr verbreitete Anwendung findet.

Die allgemeinsten Werthe, welche wir an dem genannten Orte (Gl. 178) für die Verschiebungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ gefunden haben, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x} = \Sigma\left(\frac{\delta F}{\delta x} + \frac{\delta f_2}{\delta z} - \frac{\delta f_3}{\delta y} + y\frac{\delta f_0}{\delta z} - z\frac{\delta f_0}{\delta y}\right) - \Sigma\left(\frac{\delta \psi_2}{\delta z} - \frac{\delta \psi_3}{\delta y}\right) \\ \text{u. s. f.,} \end{aligned}\right\} (133.$$

worin die Wahl der mit F, f und ψ bezeichneten Functionen nur durch die Eigenschaften:

*) Oder wie Schwerd in seinen „Beugungserscheinungen" es ausdrückt, ein solches Aethertheilchen schwingt in einer Millionteл-Sekunde 400 millionen-mal!

$$\frac{d^2 F}{d t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{d^2 f}{d t^2} = b^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = h^2 \psi$$

beschränkt ist, sind ganz unabhängig von dem Entstehungsort solcher vibrirenden Bewegungen; man kann sich daher für jedes unter dem Zeichen Σ der Gleichungen (133) begriffenes Summenglied eine von einem andern Orte ausgehende vibrirende Bewegung denken, und dafür ein besonderes $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ einführen, so daß man hat

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3 + \text{etc.}\,, \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}_1 + \mathfrak{y}_2 + \mathfrak{y}_3 + \text{etc.}\,, \quad \text{u. s. f.}$$

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \frac{d\mathfrak{x}_1}{dt} + \frac{d\mathfrak{x}_2}{dt} + \frac{d\mathfrak{x}_3}{dt} + \text{etc.}\,, \quad \frac{d\mathfrak{y}}{dt} = \frac{d\mathfrak{y}_1}{dt} + \frac{d\mathfrak{y}_2}{dt} + \frac{d\mathfrak{y}_3}{dt} + \text{etc.}\,,$$

u. s. f. ,

und man wird daraus sofort den Schluß ziehen,

daß verschiedene und von verschiedenen Orten ausgehende oscillirende Bewegungen gleichzeitig nebeneinander bestehen,

daß eine jede einzelne für sich fortgepflanzt wird, als wenn sie allein vorhanden wäre, und

daß die augenblickliche Ausweichung aus der Gleichgewichtslage und die Oscillationsgeschwindigkeit eines Flüssigkeitstheilchens die Resultirenden sind von allen Ausweichungen und Geschwindigkeiten, welche diesem Flüssigkeitstheilchen in dem betreffenden Augenblicke durch jede einzelne jener Oscillationsbewegungen ertheilt werden würde, wenn diese allein vorhanden wäre.

Dieser Folgerung, welcher man den Namen: Princip der Uebereinanderlegung kleiner Bewegungen gegeben hat, findet seine unmittelbar wahrnehmbare Bestätigung durch die ringförmigen Wellensysteme an der Oberfläche eines ruhigen Wassers; denn man sieht hier

zwei und mehrere an verschiedenen Orten erregte Ringsysteme sich ungestört durchkreuzen und ausbreiten, als wenn jedes allein vorhanden wäre, und kann deutlich wahrnehmen, wie zwei gleichzeitig an demselben Punkte ankommende Wellenberge einen höhern Wellenberg, zwei zusammentreffende Wellenthäler ein tieferes Thal bilden und wie Wellenberg und Wellenthal sich gegenseitig ausgleichen. Dadurch wird es dann auch erklärlich, wie ein geübtes Ohr in einem Concert alle einzelne Stimmen unterscheiden, und wie das Auge in dem scheinbaren Chaos von Lichtwellen, welche auf dasselbe eindringen, die Erregungspunkte jedes einzelnen Systems klar erkennen kann, und es ist natürlich, daß jenes Princip die Grundlage bilden muß für die mechanische Erklärung der meisten und wichtigsten optischen Erscheinungen.

Dritter Abschnitt.

Gleichgewicht eines in eine Flüssigkeit eingetauchten festen Körpers.

§. 63.

Wenn ein fester Körper ganz oder zum Theil in eine Flüssigkeit eingetaucht ist, von welcher wir voraussetzen, daß sie nicht chemisch auf den Körper einwirkt, so erleidet dieser in allen Punkten, wo ihn die Flüssigkeit berührt, einen Druck, wie die Gefäßwände, und dieser Druck ist noch den übrigen Kräften, die an dem Körper angreifen, beizufügen, wenn es sich darum handelt, den Gleichgewichts-Zustand dieses Körpers in der Flüssigkeit zu untersuchen. Derselbe Druck wird allerdings auch bei dem Bewegungszustande eines eingetauchten Körpers zu berücksichtigen sein; allein hier ist er neben den sonstigen Kräften nicht allein maßgebend, da in den allermeisten Fällen durch die Bewegung des Körpers auch die Flüssigkeit in Bewegung gesetzt wird; es müßte daher in allen diesen Fällen auch der Widerstand der Flüssigkeit in Rechnung gebracht werden, oder es müßte für eine streng rationelle Untersuchung die Bewegung des Körpers und der ihn umgebenden Flüssigkeit zusammen betrachtet werden. Die Lösung einer solchen Aufgabe, bei welcher die Bewegung der Flüssigkeit weder eine eigentlich fließende, noch eine auf sehr kleine Ausweichungen beschränkte ist, übersteigt aber noch sehr weit die Kräfte unserer Analysis; ich werde mich hier deßhalb ausschließlich auf die Untersuchung des ruhenden Gleichgewichtszustandes eingetauchter Körper beschränken.

Seien demnach, wie in §§. 7 und 8, $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$, $\mathfrak{P}_z$ die fördernden Componenten des von der Flüssigkeit auf die eingetauchte Oberfläche des Körpers ausgeübten Gesammtdruckes, aber hier mit den ent-

sprechenden Qualitätszeichen versehen je nach dem Sinn, in welchem sie wirken, und $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ die drehenden Wirkungen dieses Druckes; ferner seien X, Y, Z die fördernden und M_X, M_Y, M_Z die drehenden Gesammtwirkungen der sonstigen an dem eingetauchten Körper angreifenden Kräfte; man hat dann für den ruhenden Gleichgewichtszustand desselben folgende sechs Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{lll} X + \mathfrak{P}_x = 0 , & Y + \mathfrak{P}_y = 0 , & Z + \mathfrak{P}_z = 0 , \\ M_Z + \mathfrak{M}_z = 0 , & M_Y + \mathfrak{M}_y = 0 , & M_X + \mathfrak{M}_x = 0 , \end{array}\right\} (134.$$

und schließt daraus, daß die fördernde und die drehende Wirkung des Druckes der Flüssigkeit je der fördernden und der drehenden Wirkung aller sonstigen Kräfte, welche an dem Körper angreifen, gleich und entgegengesetzt sein muß. Lassen sich daher diese letztern Kräfte auf eine allgemeine Resultirende zurückführen, d. h. wird die Bedingungsgleichung:

$$X M_X + Y M_Y + Z M_Z = 0 \qquad (a.$$

befriedigt, so muß man auch haben:

$$\mathfrak{P}_x \mathfrak{M}_x + \mathfrak{P}_y \mathfrak{M}_y + \mathfrak{P}_z \mathfrak{M}_z = 0 , \qquad (b.$$

es muß auch der ganze von der Flüssigkeit ausgeübte Druck durch eine einzige Kraft ersetzt werden können, und diese einzige Kraft muß dann jener allgemeinen Resultirenden gleich und direct entgegengesetzt sein, wenn der eingetauchte Körper im Gleichgewicht sein soll.

§. 64.

Der ebengenannte Fall findet immer statt bei einem schweren Körper, welcher in eine Flüssigkeit eingetaucht ist, wenn außer dem Gewichte keine Kraft an dem Körper angreift, wenn also Reibung und Adhäsion der Flüssigkeit vernachlässigt wird, und der Körper frei in der Flüssigkeit schwebt oder auf der Oberfläche derselben schwimmt. Unter dieser Voraussetzung wird der Körper in der Flüssigkeit im Gleichgewichte sein, wenn der Gesammtdruck der Flüssigkeit dem Gewichte des Körpers gleich und entgegengesetzt ist, wenn er durch eine einzige Kraft ersetzt werden kann, welche 1) dem Gewichte des Körpers gleich, 2) vertical aufwärts gerichtet ist, und 3) der Richtung nach durch den Schwerpunkt des eingetauchten Körpers geht.

Beschränken wir uns dann noch auf die Annahme, daß auch die

Flüssigkeit schwer sei, so werden wir aus den Untersuchungen in §§. 13 u. ff. leicht schließen, daß für's Erste die Bedingung einer allgemeinen Resultirenden des Druckes mit der Eigenschaft 2) immer erfüllt wird. Denn nimmt man in der Flüssigkeit ein rechtwinkliges Coordinatensystem an, dessen z-Achse vertical und im Sinne der Schwere positiv ist, und denkt man sich um den ganz eingetauchten Körper drei berührende und projicirende Cylinderflächen, deren Erzeugende je einer der Coordinaten-Achsen parallel sind, so werden die Berührungspunkte auf der Oberfläche des Körpers drei Curven bilden, von denen je eine die Umhüllungsfläche desselben in zwei solche Theile theilt, daß die zur betreffenden Erzeugenden parallele Componente des geometrischen Druckes in allen Punkten des einen Theiles derselben Componenten dieses Druckes in allen Punkten des andern Theiles dem Sinne nach entgegengesetzt ist. Der geometrische Druck P in irgend einem Punkte einer schweren homogenen Flüssigkeit wird aber für eine nicht sehr beträchtliche Ausdehnung durch

$$P = P_0 + p z$$

ausgedrückt, wenn P_0 den Druck in der xy-Ebene und p das zunächst als constant angenommene geometrische Gewicht der Flüssigkeit ist; man hat daher nach den Gleichungen (17) in §. 7 für die zur x-Achse parallele fördernde Componente $\mathfrak{P}_x'$ des Druckes auf einen der beiden Theile, welche durch den zur yz-Ebene senkrechten Berührungs-Cylinder begrenzt werden, ohne Rücksicht auf das Zeichen den Ausdruck:

$$\mathfrak{P}_x' = \int_{b_2}^{b_1} d y \int_{\chi_2(y)}^{\chi_1(y)} d z \, . \, (P_0 + p z) \quad ,$$

wenn $z_1 = \chi_1(y)$ und $z_2 = \chi_2(y)$ die beiden für z aus der Gleichung $f_3(y, z) = 0$ der projicirenden Cylinderfläche sich ergebenden Werthe, und b_1 und b_2 die Abstände von der xy-Ebene der beiden äußersten verticalen Tangential-Ebenen zu dieser Cylinderfläche sind. Genau derselbe Ausdruck ergibt sich aber auch für die Componente $\mathfrak{P}_x''$ auf den andern jener beiden Theile, da beide Theile von demselben Cylinder begrenzt werden, und da beide Componenten entgegengesetzten Sinn haben, so folgt

$$\mathfrak{P}_x = \mathfrak{P}_x' + \mathfrak{P}_x'' = 0 \quad .$$

Ganz derselbe Schluß wendet sich auch auf den zur y-Achse parallelen Druck an, man hat also auch

$$\mathfrak{P}_y = \mathfrak{P}_y' + \mathfrak{P}_y'' = 0 \quad ,$$

und in gleicher Weise wird man sich überzeugen, daß auch die Momente $\mathfrak{P}_x\, y_1$, $\mathfrak{P}_x\, z_1$, $\mathfrak{P}_y\, x_2$, $\mathfrak{P}_y\, z_2$ Null werden; damit folgt aber auch

$$\mathfrak{M}_z = \mathfrak{P}_y\, x_2 - \mathfrak{P}_x\, y_1 = 0 \quad ,$$

die Bedingungsgleichung (b) wird also befriedigt, und der Gesammtdruck der Flüssigkeit wird in allen Fällen durch die fördernde und allgemeine, verticale Resultirende $\mathfrak{P}_z$ vorgestellt, selbst wenn die (jedenfalls im Gleichgewichtszustande vorausgesetzte) Flüssigkeit nicht homogen ist, weil in diesem Falle das veränderliche geometrische Gewicht p derselben nach §§. 10 und 11 nur eine Function von z sein kann.

Für diese Kraft $\mathfrak{P}_z$ hat man in einer homogenen Flüssigkeit nach §. 7 den Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{P}_z &= \int_{a_2}^{a_1} dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} dy \,.\, (P_0 + p z_1) - \int_{a_2}^{a_1} dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} dy \,.\, (P_0 + p z_2) \\ &= \int_{a_2}^{a_1} dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} dy \,.\, p(z_1 - z_2) \quad ,\end{aligned}\right\} \qquad (135^a.$$

worin ähnlich wie vorher $y_1 = \varphi_1(x)$ und $y_2 = \varphi_2(x)$ die aus der Gleichung $f_1(x, y)$ des zur xy-Ebene senkrechten Berührungs-Cylinders folgenden Werthe für y sind, und $z_1 = F_1(x, y)$ und $z_2 = F_2(x, y)$ die Ordinaten eines beliebigen Punktes in je einem der beiden durch die Berührungs-Curve geschiedenen Theile der Oberfläche des eingetauchten Körpers, und zwar mit Rücksicht auf das Zeichen des Druckes z_1 für den oberen und z_2 für den unteren Theil derselben. Der Druck P_0 ist also ohne Einfluß; die Differenz $z_2 - z_1$ ist die Länge einer von der Umhüllungsfläche des Körpers begrenzten verticalen Geraden, das Integral nach x und y aus $z_2 - z_1$ drückt daher das Volumen des eingetauchten Körpers aus; der obige Werth von $\mathfrak{P}_z$ stellt demnach das im Sinne der negativen z wirkende Gewicht eines ganz congruenten Körpers vor, dessen Dichte dieselbe ist, wie die der Flüssigkeit, oder mit einem Wort, $\mathfrak{P}_z$ ist das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit. Ebenso findet man die Werthe:

$$\mathfrak{P}_z\, x_3 = \int_{a_2}^{a_1} dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} dy \,.\, px(z_1 - z_2) \; , \quad \mathfrak{P}_z\, y_3 = \int_{a_2}^{a_1} dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} dy \,.\, py(z_1 - z_2) \qquad (135^b.$$

und schließt daraus, daß die Richtung des Druckes $\mathfrak{P}_z$ immer durch den Mittelpunkt des Volumens oder durch den Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit geht, da bei einer homogenen Flüssigkeit diese beiden Punkte zusammenfallen.

Die vorhergehenden Sätze gelten aber auch für eine nicht homogene Flüssigkeit; denn für diese hat man, da p eine Function von z sein muß,

136.)

$$\left\{\begin{aligned} & P = P_0 + \int_0^z dz \,.\, p \,, \\ & \mathfrak{P}_z = \int_{a_2}^{a_1} dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} dy \,.\, [P_0 + \int_0^{z_1} dz.p - (P_0 + \int_0^{z_2} dz.p)] = \int_{a_2}^{a_1} dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} dy \,.\, \int_{z_2}^{z_1} dz.p \,, \\ & \mathfrak{P}_z x_3 = \int_{a_2}^{a_1} dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} dy \,.\, x \int_{z_2}^{z_1} dz \,.\, p \,, \quad \mathfrak{P}_z y_3 = \int_{a_2}^{a_1} dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} dy \,.\, y \int_{z_2}^{z_1} dz \,.\, p \,; \end{aligned}\right.$$

der Werth von $\mathfrak{P}_z$ drückt also das Gewicht eines dem eingetauchten durchaus gleichen Körpers aus, dessen Dichte in jedem horizontalen Querschnitt dieselbe ist, wie in der Flüssigkeit, und stellt demnach wieder das Gewicht der verdrängten, gleichsam durch die geometrische Umhüllungsfläche des eingetauchten Körpers aus der ganzen Flüssigkeitsmasse an dem betreffenden Orte ausgeschnittenen Flüssigkeit vor, und die Werthe von $\mathfrak{P}_z x_3$ und $\mathfrak{P}_z y_3$ sind offenbar die Momente des Gewichtes dieser Flüssigkeit, also x_3 und y_3 die Coordinaten ihres Schwerpunktes.

Es wird nun keines besondern Nachweises mehr bedürfen, daß dieselben Sätze auch für den Fall gültig sind, wenn der Körper nur zum Theil in eine schwere Flüssigkeit eingetaucht ist, da hier die horizontale Spiegelfläche der Flüssigkeit einen Theil der horizontalen projicirenden Cylinderflächen ausmacht, welche den eingetauchten Theil des Körpers berührend umhüllen, und da in den Beziehungen (135) und (136) sich nichts ändert, als daß häufig z_1 constant, oder wenn die Spiegelfläche als xy genommen wird, Null ist, nämlich dann, wenn der verticale Umhüllungscylinder den Körper außerhalb der Flüssigkeit berührt.

§. 65.

Nach dem Vorhergehenden kommen die Bedingungen (134) für das Gleichgewicht eines freien schweren Körpers in einer schweren Flüssigkeit auf folgende zurück:

$$Z + \mathfrak{P}_z = 0 \;,\quad M_X + \mathfrak{M}_x = 0 \;,\quad M_Y + \mathfrak{M}_y = 0 \;,$$

oder, da man wegen $X = 0$, $Y = 0$, $\mathfrak{P}_x = 0$, $\mathfrak{P}_y = 0$ hat,

$$M_X = Z\,Y \;,\quad M_Y = -Z\,X \;,\quad \mathfrak{M}_x = \mathfrak{P}_z y_3 \;,\quad \mathfrak{M}_y = -\mathfrak{P}_z x_3 \;,$$

und wenn man das Gewicht Z des Körpers durch Q, das Gewicht $(-\mathfrak{P}_z)$ der verdrängten Flüssigkeit durch W ersetzt,

$$Q = W \;,\quad x_3 = X \;,\quad y_3 = Y \;, \qquad (137.$$

und diese Bedingungen verlangen nach den vorhergehenden Erörterungen

1) daß das Gewicht des eingetauchten Körpers dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit gleich sei,

2) daß die Schwerpunkte des Körpers und der verdrängten Flüssigkeit in derselben Vertikalen liegen.

Ist der Körper homogen, V sein Rauminhalt, p das Gewicht der Volumeneinheit, also $Q = p\,V$, und derselbe ganz in die auch homogene Flüssigkeit eingetaucht, so ist auch V das Volumen der durch ihn verdrängten Flüssigkeit, und daher $W = p'\,V$ das Gewicht dieser Flüssigkeit, wenn p' das Gewicht der Raumeinheit derselben ist; die erste Gleichgewichtsbedingung verlangt demnach, daß in diesem Falle

$$p = p' \qquad (138.$$

sei, d. h. daß der eingetauchte Körper und die Flüssigkeit gleiche Dichte oder dasselbe spezifische Gewicht haben, und die Befriedigung dieser Bedingung verbürgt im jetzigen Falle allein schon das Gleichgewicht, da hier die Schwerpunkte des Körpers und der verdrängten Flüssigkeit zugleich die Mittelpunkte der Räume des Körpers und der verdrängten Flüssigkeit, und diese in jeder Lage des Körpers congruent sind.

Das Gleichgewicht kann also nicht bestehen, wenn p' kleiner als p ist; der Körper wird vielmehr sinken, bis er unterstützt wird; ist dagegen p' größer als p, so wird er steigen, bis er die Oberfläche der Flüssigkeit

erreicht hat und so weit aus der Flüssigkeit ausgetreten ist, daß das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit seinem Gewichte gleich wird. Bezeichnet dann V' das Volumen der verdrängten Flüssigkeit oder des von der verlängerten Spiegelfläche begrenzten eingetauchten Körpertheiles, so wird die erste Bedingung (137)

139.) $$p V = p' V' \quad \text{oder} \quad \frac{V'}{V} = \frac{p}{p'} \quad ,$$

die Räume des ganzen Körpers und seines eingetauchten Theiles verhalten sich daher umgekehrt wie die spezifischen Gewichte des Körpers und der Flüssigkeit. Das Gleichgewicht besteht nun aber im Allgemeinen nicht in jeder Lage des Körpers, sondern es muß die zweite Bedingung noch besonders erfüllt werden.

Läßt man dann denselben Körper in eine andere Flüssigkeit eintauchen, deren spezifisches Gewicht p" größer ist, als p, und bezeichnet den Rauminhalt des beim Gleichgewichtszustande in dieser Flüssigkeit eintauchenden Theiles mit V", so hat man wieder

140.) $$p'' V'' = p V = p' V' \quad , \quad \frac{V''}{V'} = \frac{p'}{p''} \quad ;$$

wenn also derselbe Körper in zwei verschiedenen Flüssigkeiten nur zum Theil eintaucht, so verhalten sich die eingetauchten Räume umgekehrt wie die spezifischen Gewichte der betreffenden Flüssigkeiten.

Wenn der Körper nicht homogen ist, so kann man den Quotienten aus seinem Gewicht und Volumen das mittlere spezifische Gewicht desselben nennen und mit p_1 bezeichnen, so daß man hat

$$Q = p_1 V \quad ;$$

es werden dann für das Gleichgewicht dieses Körpers in einer homogenen schweren Flüssigkeit noch ganz die vorhergehenden Beziehungen gelten, wenn man darin p durch p_1 ersetzt; und wenn der Schwerpunkt dieses nicht homogenen Körpers mit dem Mittelpunkt seines Volumens zusammenfällt, so wird derselbe auch, ganz eingetaucht, in jeder Lage im Gleichgewicht sein. Fallen diese Punkte dagegen nicht zusammen, so besteht das Gleichgewicht nur in zwei Lagen, nämlich nur wenn der Schwerpunkt vertical unter oder über dem Mittelpunkte des Volumens liegt, und man wird leicht einsehen, daß die erstere Lage dem stabilen, die letztere dem nicht stabilen oder labilen Gleichgewichtszustande entspricht.

Damit demnach eine hohle Kugel, deren äußere Schale das spezifische Gewicht p besitzt, in einer Flüssigkeit vom spezifischen Gewichte p′ ganz eingetaucht schwimmt, muß man haben:

$$\frac{\pi}{6}\, p\, (d_1^3 - d_0^3) = \frac{\pi}{6}\, p'\, d_1^3 \ ,$$

wobei d_1 der äußere, d_0 der innere Durchmesser der Schale ist; es folgen daraus für den inneren Durchmesser d_0 und die Schalendicke δ die Werthe:

$$d_0 = d_1 \sqrt[3]{\frac{p - p'}{p}} \ , \qquad \delta = \frac{1}{2}\, d_1 \left(1 - \sqrt[3]{\frac{p - p'}{p}}\right) \ ,$$

und man schließt ferner daraus, daß diese Beziehungen für jeden hohlen Körper gelten, dessen äußere und innere Begrenzungsflächen ähnlich und concentrisch sind.

Dieselbe Kugel wird in einer andern Flüssigkeit, deren spezifisches Gewicht p″ größer ist, als p′ nur bis zu einer Tiefe h einsinken, welche sich aus der Gleichung:

$$\frac{\pi}{6}\, p\, (d_1^3 - d_0^3) = \frac{\pi}{6}\, p''\, h^2\, (3 d_1 - 2 h)$$

bestimmen läßt, sowie aus derselben auch wieder umgekehrt die Dicke der Schale berechnen läßt, welche die Kugel erhalten muß, wenn sie gerade auf die Tiefe h einsinken soll. In beiden Fällen besteht natürlich das Gleichgewicht für jede Lage der Kugel, weil ihr Schwerpunkt mit dem geometrischen Mittelpunkte zusammenfällt.

Bilden wir dagegen eine Kugel aus zwei Segmenten von verschiedenen Stoffen, deren spezifischen Gewichte p_1 und p_2, und deren Höhen h und d — h sind, so wird diese in einer Flüssigkeit vom spezifischen Gewicht p′ ganz untergetaucht schwimmen, wenn man hat

$$\frac{\pi}{6}\, p_1 h^2 (3 d - 2 h) + \frac{\pi}{6}\, p_2 (d - h)^2 (d + 2 h) = \frac{\pi}{6}\, p'\, d^3 \ ,$$

oder

$$(p_1 - p_2)\, h^2 (3 d - 2 h) = (p' - p_2)\, d^3 \ ;$$

daraus folgt aber

$$h^2 = \frac{p' - p_2}{p_1 - p_2} \, \frac{d^3}{3 d - 2 h} \quad \text{und} \quad p_1 - p_2 = (p' - p_2) \frac{d^3}{h^2 (3 d - 2 h)}$$

und weil immer $h < d$, also auch $h^2(3d-2h) < d^3$ ist,

$$p_1 > p' > p_2 \quad ;$$

von den spezifischen Gewichten der Kugelsegmente muß also das eine größer, das andere kleiner sein, als das der Flüssigkeit.

Sind diese Gleichungen befriedigt, so wird die Kugel im Gleichgewicht sein, wenn die Gerade, welche die Schwerpunkte beider Segmente verbindet, vertical oder wenn die Trennungsebene dieser Segmente horizontal ist, aber dieses Gleichgewicht wird nur ein stabiles sein, wenn das Segment mit dem größern spezifischen Gewichte p_1 auch das untere ist.

§. 66.

Diese beiden Lagen der Kugel sind auch noch die einzigen Gleichgewichtslagen, wenn dieselbe in einer Flüssigkeit von einem größern spezifischen Gewichte als p' nur zum Theil eintaucht. Bei andern Körperformen dagegen gibt es selbst für den Fall, daß der Stoff, aus welchem sie bestehen, homogen ist, sehr verschiedene Gleichgewichtslagen bei theilweiser Eintauchung, und es kann je nach dem Verhältniß der spezifischen Gewichte bald die eine, bald eine andere die stabile Gleichgewichtslage werden.

Nehmen wir z. B. den homogenen Würfel, so erkennen wir leicht, daß der Schwerpunkt S des ganzen Körpers senkrecht über dem Schwerpunkt S' des eingetauchten Theiles liegen wird,

a) wenn eine der Kanten vertical ist (Fig. 22, a),
b) wenn eine durch zwei gegenüberliegende Kanten gelegte Ebene horizontal ist (Fig. 22, b),
c) wenn eine Raum-Diagonale, die Gerade, welche zwei gegenüberliegende Ecken verbindet, vertical ist (Fig. 22, c);

aber es ist nicht ebenso leicht zu erkennen, ob es noch und was für andere Gleichgewichtslagen gibt. Die beiden ersten der ebengenannten Lagen des Würfels sind zusammen in der allgemeineren Lage enthalten, bei welcher vier parallel-laufende Kanten horizontal sind; man kann daher fragen, ob bei dieser Lage der Kanten nicht noch eine andere Gleichgewichtslage vorkommen kann.

Alle diese Lagen haben auch das gemeinschaftlich, daß zwei Seitenflächen zu dem Spiegel der Flüssigkeit senkrecht sind, und daß sich das Volumen des ganzen Körpers zu dem des eingetauchten Theiles verhält, wie eine dieser Seitenflächen zu ihrem eingetauchten Abschnitt; diese Lagen wer-

den sich aber für die Bestimmung der Gleichgewichtslage wesentlich darnach unterscheiden, ob der eingetauchte Abschnitt ein Dreieck oder ein Viereck (Trapez) oder ein Fünfeck ist, oder ob eine, zwei oder drei der horizontalen Kanten eingetaucht sind. (Fig. 23, a, b, c.)

Im ersten Falle sei a die Länge der Würfelkante oder der Seite des Quadrates A B C D, Fig. 23, a; ferner seien x und y die eingetauchten Abschnitte Am und An der Seiten AB und AD; man hat dann einmal nach (140) die Bedingung:

$$p\,a^2 = \frac{1}{2} p' x y \qquad (a.$$

und für den Winkel $nmA = \varphi$ die Beziehung: $tang\,\varphi = \frac{y}{x}$. Ferner sind die Abstände x_1 und y_1 des Schwerpunktes S' von den Seiten An und Am ausgedrückt durch

$$x_1 = \frac{1}{3} x \quad , \quad y_1 = \frac{1}{3} y \quad ;$$

für den Winkel φ', welchen die Gerade SS' mit der Seite AB bildet, hat man

$$tang\,\varphi' = \frac{\frac{1}{2} a - y_1}{\frac{1}{2} a - x_1} = \frac{3a - 2y}{3a - 2x} \quad ,$$

und die weitere Bedingung, daß diese Gerade vertical oder zu der Spiegelfläche MN senkrecht, daß also $\varphi' = \frac{1}{2}\pi - \varphi$ ist, gibt

$$\frac{3a - 2y}{3a - 2x} = \frac{x}{y} \qquad \text{oder} \qquad (2x + 2y - 3a)(x - y) = 0 \quad .$$

Diese Gleichung zeigt, daß eine der betreffenden Gleichgewichtslagen für jedes Verhältniß von p' zu p durch $x = y$ bedingt ist, und das ist offenbar die oben unter 2) angegebene Gleichgewichtslage; die andern Gleichgewichtslagen müssen den Gleichungen:

$$x y = \frac{2p}{p'} a^2 \quad , \quad x + y = \frac{3}{2} a$$

genügen, und man zieht aus diesen die Werthe:

$$x = \frac{3}{4} a \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{32p}{9p'}}\right) \; , \quad y = \frac{3}{4} a \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{32p}{9p'}}\right) \; ,$$

welche zeigen, daß noch weitere Gleichgewichtslagen von der Art, daß die Spiegelfläche der Flüssigkeit zwei in einer horizontalen eingetauchten Kante zusammenstoßende Flächen schneidet, nur dann möglich sind, wenn 32 p kleiner als 9 p' oder $p < 0{,}28125\,p'$ ist, da $9p' = 32p$ auf den frühern Fall $x = y$ zurückführt, und $9p' < 32p$ imaginäre Werthe für x und y gibt. Man hat aber auch noch zu beachten, daß x und y nicht größer werden können als a und diese Bedingung beschränkt das Verhältniß $\frac{p}{p'}$ auf den kleinsten Werth: $\frac{1}{4}$, so daß nur zwischen den Grenzen $\frac{p}{p'} = 0{,}25$ und $= 0{,}28..$ noch andere, als die unter 2) angedeutete Gleichgewichtslagen möglich sind. Ist gerade $p' = 4p$ so wird $x = \frac{1}{2} a (1 \pm \frac{1}{2})$, also $x = a$ und $y = \frac{1}{2} a$, oder $x = \frac{1}{2} a$, $y = a$; es kann also eine Kante des Würfels in der Spiegelfläche der Flüssigkeit liegen, und diese letztere die eine geneigte Seitenfläche halbiren. (Fig. 24, Spiegel in MN.)

Im zweiten Fall, wenn der eingetauchte Abschnitt der verticalen Seitenfläche ein Viereck ist (Fig. 23, b), sei $Bm = x$, An wieder $= y$; man hat als erste Bedingung

$$\text{b.)} \quad \frac{1}{2} p' a (x + y) = p a^2 \quad \text{oder} \quad x + y = \frac{2pa}{p'} ,$$

und für den Schwerpunkt S' die Abstände x_1 und y_1 von den Seiten AD und AB:

$$x_1 = \frac{1}{3} a \frac{2x + y}{x + y} , \quad y_1 = \frac{1}{2} x + \frac{y - x}{2a} x_1 = \frac{x^2 + xy + y^2}{3(x + y)} .$$

Der Winkel φ, welchen die Spiegelfläche MN mit der Seite AB macht, ist gegeben durch

$$tang\, \varphi = \frac{y - x}{a} ,$$

und der Winkel φ', welchen die Gerade SS' mit derselben Seite bildet, ergibt sich durch die Gleichung:

$$tang\, \varphi' = \frac{a - 2y_1}{a - 2x_1} = \frac{3a(x + y) - 2(x^2 + xy + y^2)}{a(y - x)}$$

die Bedingung, daß SS' auf MN senkrecht steht, wird daher mit Berücksichtigung des obigen Werthes (b) von $x + y$ die Form erhalten:

$$(y-x)\left(a^2-6a^2\frac{p}{p'}+4ay\frac{p}{p'}+2x^2\right)=0 \ .$$

Außer dem für jedes Verhältniß $p:p'$ geltenden Werthe $x=y$, welcher der sub 1) angeführten Gleichgewichtslage entspricht, findet man darnach in Verbindung mit (b) die Werthe:

$$x=a\left(\frac{p}{p'}\pm\sqrt{3\frac{p}{p'}-3\frac{p^2}{p'^2}-\frac{1}{2}}\right) \ , \quad y=a\left(\frac{p}{p'}\mp\sqrt{3\frac{p}{p'}-3\frac{p^2}{p'^2}-\frac{1}{2}}\right) \ ,$$

welche zeigen, daß für unsern jetzigen Fall der Werth von $\frac{p}{p'}$ zwischen den aus der Gleichung:

$$\frac{p^2}{p'^2}-\frac{p}{p'}+\frac{1}{6}=0$$

sich ergebenden Grenzen:

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)=0{,}789 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)=0{,}211\,..$$

liegen muß. Für $\frac{p}{p'}=\frac{1}{4}$ erhalten wir, wie in dem vorhergehenden Falle

$$x=a\left(\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}\right) \ , \quad x=\frac{1}{2}a \ \text{oder} \ =0 \ , \quad y=0 \ \text{oder} \ =\frac{1}{2}a \ ;$$

dieß ist offenbar die eine Grenze für den jetzigen Fall, da x nicht kleiner werden kann, als Null; die andere Grenze ergibt sich für $\frac{p}{p'}=\frac{3}{4}$; denn man hat dann

$$x=a\left(\frac{3}{4}\pm\frac{1}{4}\right) \ , \quad x=a \ , \quad y=\frac{1}{2}a \ .$$

Der Werth $\frac{p}{p'}=\frac{1}{2}$ berührt gleichsam beide Grenzen, da er $x=0$ und $y=a$ oder umgekehrt gibt, also dem Falle entspricht, wenn der Würfel gerade zur Hälfte eintaucht und zwei Kanten in der Spiegelfläche der Flüssigkeit liegen.

Im dritten Falle endlich, wenn der eingetauchte Abschnitt ABmnD

Fig. 23, c, ein Fünfeck ist, kann man dem ersten Falle entsprechend $Cn = x$, $Cm = y$ setzen, und wird so als erste Bedingung

$$p'\left(a^2 - \frac{1}{2}xy\right) = pa^2 \quad , \qquad xy = \frac{2(p'-p)}{p'}a^2$$

erhalten, welche in dieser Form in Verbindung mit der Beachtung, daß die zweite Bedingung für das Senkrechtstehen der SS' auf MN dieselbe bleiben muß, wie im ersten Falle, zeigt, daß man in den dem ersten Fall entsprechenden Werthen von x und y nur $p' - p$ für p einsetzen darf, um die dem jetzigen Falle entsprechenden zu erhalten. Man findet so

$$x = \frac{3}{4}a\left(1 \pm \sqrt{\frac{32p - 23p'}{9p'}}\right) \; , \quad y = \frac{3}{4}a\left(1 \mp \sqrt{\frac{32p - 23p'}{9p'}}\right) ,$$

und schließt daraus, daß für den jetzigen Fall das Verhältniß $p : p'$ zwischen 0,718.. und 0,75 liegen muß, wenn außer der in Fig. 22, b angedeuteten noch andere Gleichgewichtslagen möglich sein sollen. Für $\frac{p}{p'} = \frac{3}{4}$ z. B. hat man die in Fig. 24 mit dem Spiegel in M'N' dargestellte Gleichgewichtslage.

§. 67.

Betrachten wir nun den Würfel in seiner allgemeinsten Stellung, so werden wir zuerst aus dem Vorhergehenden schließen, daß sich die verschiedenen Lagen, bei welchen der Schwerpunkt des Würfels unter den Spiegel der Flüssigkeit zu liegen kommt, auf ähnliche Lagen, bei welchen derselbe Punkt über dieser Spiegelfläche liegt, dadurch zurückführen lassen, daß man in den letztern Fällen die Differenz $p' - p$ der spezifischen Gewichte statt des spezifischen Gewichtes p einführt, daß es also genügt, zunächst diejenigen Lagen speciell zu untersuchen, bei denen der Schwerpunkt des Würfels über oder noch in der Spiegelfläche liegt. Diese Lagen lassen sich am einfachsten nach der Zahl der eingetauchten Ecken unterscheiden, je nachdem nämlich ein, zwei, drei oder vier Ecken des Würfels zugleich eingetaucht sind, und im letzten Falle, ob diese vier Ecken derselben Seitenfläche angehören oder ob sie durch drei zusammenstoßende Kanten verbunden werden.

Wenn der Würfel nur mit einem Eck in die Flüssigkeit eintaucht, so schneidet diese eine dreiseitige Pyramide ab, deren drei von der eingetauchten Spitze A ausgehende Kanten x, y und z seien. Der In-

halt V' dieser Pyramide ist $\frac{1}{6}$ x y z; die erste Gleichgewichtsbedingung ist demnach

$$\frac{1}{6} p' x y z = p a^3 \; ; \qquad (c.$$

die Abstände des Schwerpunktes S' derselben von den drei eingetauchten Seitenflächen sind $\frac{1}{4}x$, $\frac{1}{4}y$, $\frac{1}{4}z$, und die Projectionen der Verbindungslinie SS' der beiden Schwerpunkte (S des Würfels und S' der eingetauchten Pyramide) auf die drei von A ausgehenden Kanten sind

$$\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}x \; , \quad \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}y \; , \quad \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}z \; ;$$

bezeichnet man daher die Länge dieser Verbindungslinie mit l, so hat man für die Cosinus der Winkel λ, μ, ν, welche dieselbe mit den drei Kanten bildet, die Ausdrücke:

$$\cos\lambda = \frac{2a - x}{4l} \; , \quad \cos\mu = \frac{2a - y}{4l} \; , \quad \cos\nu = \frac{2a - z}{4l} \; . \qquad (d.$$

Die drei in A zusammenstoßenden Seitendreiecke der abgeschnittenen Pyramide sind auch die Projectionen der in der Spiegelfläche der Flüssigkeit liegenden Grundfläche derselben auf die entsprechenden Seitenflächen des Würfels, und die Flächen dieser Projectionen auf die Ebenen der x y, x z und y z sind der Reihe nach: $\frac{1}{2}xy$, $\frac{1}{2}xz$, $\frac{1}{2}yz$; ist demnach noch O der Flächeninhalt der Grundfläche der Pyramide, so hat man für die Cosinus der Winkel λ', μ', ν', welche die Normale zu jener Grundfläche mit den Kanten der x, y und z bildet, die Werthe:

$$\cos\lambda' = \frac{yz}{2O} \; , \quad \cos\mu' = \frac{xz}{2O} \; , \quad \cos\nu' = \frac{xz}{2O} \; ,$$

$$= \frac{xyz}{2Ox} \; , \quad = \frac{xyz}{2Oy} \; , \quad = \frac{xyz}{2Oz} \; ,$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung (c), und wenn man das Verhältniß p : p' durch β ersetzt,

$$\cos\lambda' = \frac{3\beta a^3}{Ox} \; , \quad \cos\mu' = \frac{3\beta a^3}{Oy} \; , \quad \cos\nu' = \frac{3\beta a^3}{Oz} \; . \qquad (e.$$

Die zweite Gleichgewichtsbedingung, daß die beiden Schwerpunkte S und S' in einer Normalen zur Spiegelfläche der Flüssigkeit liegen, gibt demnach die fortlaufende Gleichung:

$$\frac{12\beta l a^3}{0} = 2ax - x^2 = 2ay - y^2 = 2az - z^2 \quad ,$$

aus welcher sich die zu (c) noch nothwendigen zwei Gleichungen zwischen x, y und z ergeben. Bringt man diese letztern auf die Form:

$$(2a - x - y)(x - y) = 0 \quad , \quad (2a - x - z)(x - z) = 0 \quad ,$$

so sieht man, daß eine Auflösung unserer Aufgabe nämlich diejenige, welche der besondern, im vorhergehenden §. unter c) genannten Stellung des Würfels entspricht und für jeden Werth von β gültig ist, in den Werthen:

$$x = y = z = a\sqrt[3]{6\beta}$$

besteht, und daß die übrigen Lösungen sich auf einen Fall zurückführen lassen, nämlich den, wo zwei der Kanten-Abschnitte x, y und z gleich sind; denn wenn man auch von den vier Factoren der vorhergehenden Gleichungen die beiden

$$2a - x - y = 0 \quad , \quad 2a - x - z = 0$$

als Auflösung wählt, so folgt auch aus diesen durch Subtraction $y = z$. Man erhält daher sämmtliche weitere Lösungen, wenn es deren noch gibt, durch die Auflösung der Gleichungen:

f.) $\quad 2a - x - y = 0 \quad , \quad xy^2 = 6\beta a^3 \quad , \quad z = y \quad ,$

und durch gegenseitige Vertauschung der Veränderlichen in denselben.

Die beiden ersten dieser Gleichungen führen durch Elimination von y auf die neue Gleichung:

$$x(2a - x)^2 - 6\beta a^3 = 0 \quad ,$$

oder wenn man $x = \frac{4}{3}a + u$ setzt,

g.) $$u^3 - \frac{4}{3}a^2u + \frac{16}{27}\left(1 - \frac{81}{8}\beta\right)a^3 = 0 \quad .$$

Diese letztere Gleichung zeigt durch Vergleichung mit der Form: $x^3 - px \pm q = 0$ und mit der bekannten Bedingung: $4p^3 > 27q^2$, welche für unsere Gleichung $(1 - \frac{81}{8}\beta)^2 < 1$ gibt, daß u von $\beta = 0$ bis $\beta = \frac{16}{81}$ je drei reelle Werthe erhält; dabei ist aber zu beachten, daß x, y und z nicht größer werden können, als a, daß also einmal der größte Werth von β, welcher nach unserer Voraussetzung über die

Art der Eintauchung entspricht, nur der aus (c) mit $x = y = z = a$ folgende: $\beta = \frac{1}{6}$ sein kann, dann aber auch, weil man hat

$$x = \frac{4}{3} a + u \quad , \qquad y = z = 2a - x = \frac{2}{3} a - u \quad ,$$

daß also nur der Werth: $u = -\frac{1}{3}$ für unsere Untersuchung brauchbar ist; dieser gibt aber wieder $x = y = z$ und entspricht nur dem ebengenannten Werthe: $\beta = \frac{1}{6}$.

Wenn demnach der Würfel nur mit einem Eck in die Flüssigkeit eintaucht, so gibt es außer der verticalen Lage der Raum-Diagonale, keine Gleichgewichtslage mehr, und derselbe Schluß gilt auch für die entgegengesetzte Voraussetzung, daß nur ein Eck des Würfels über der Spiegelfläche der Flüssigkeit sich befindet, wie man sich leicht überzeugen wird, wenn man in den Gleichungen (f) und (g) das Verhältniß β durch $1 - \beta$ ersetzt.

Betrachten wir daher noch den weiteren Fall, wo der Würfel mit zwei Ecken eintaucht, also eine ganze Kante desselben unter dem Spiegel der Flüssigkeit ist. Denkt man sich diese Kante gehörig verlängert, so wird dieselbe im Allgemeinen von der Spiegelebene geschnitten werden, und man kann deßhalb den jetzigen Fall auf den vorhergehenden zurückführen, wenn man die Kantenabschnitte x, y, z von dem tiefsten Eck aus rechnet, und zwar auf den in diesem Eck zusammenlaufenden Kanten, dabei aber nun die Bedingung macht, daß x und y nicht größer werden können, z dagegen nicht kleiner werden darf, als die Würfelkante a. An der dreiseitigen Pyramide mit der Basis $\frac{1}{2} xy$ und der Höhe z ist daher im jetzigen Falle die Spitze von der Höhe $z - a$ parallel zur Basis abgeschnitten; das Volumen V′ des eingetauchten Theiles vom Würfel ist daher noch

$$V' = \frac{1}{6} xyz - \frac{1}{6} xyz \left(\frac{z-a}{z}\right)^3 = \frac{1}{6} xyz \left[1 - \left(\frac{z-a}{z}\right)^3\right] ,$$

und für die Coordinaten des Schwerpunktes dieser abgestumpften Pyramide ergeben sich die Gleichungen:

$$V' x = \frac{1}{6} xyz \,.\, \frac{1}{4} x - \frac{1}{6} xyz \left(\frac{z-a}{z}\right)^3 . \frac{1}{4} x \frac{z-a}{z} ,$$

$$= \frac{1}{24} x^2 yz \left[1 - \left(\frac{z-a}{z}\right)^4\right] ,$$

$$V' y = \frac{1}{24} xy^2 z \left[1 - \left(\frac{z-a}{z}\right)^4\right] ,$$

$$V' z = \frac{1}{6}\, x y z \,.\, \frac{1}{4}\, z - \frac{1}{6}\, x y z \left(\frac{z-a}{z}\right)^3 \left[a + \frac{1}{4}\,(z-a)\right]$$

$$= \frac{1}{24}\, x y z^2 \left[1 - \left(\frac{z-a}{z}\right)^4\right] - \frac{1}{6}\, a x y z \left(\frac{z-a}{z}\right)^3 .$$

Als erste Bedingung für das Gleichgewicht hat man dann wie früher

h.) $$V' = \beta a^3 = \frac{1}{6}\, x y z \left[1 - \left(\frac{z-a}{z}\right)^3\right] .$$

Ist ferner wieder l die Länge der Verbindungslinie SS', so bestehen für die Winkel λ, μ, ν, welche diese Gerade mit den drei Kanten der x, y und z bildet, wie oben die Beziehungen:

$$\cos\lambda = \frac{a-2x}{2l} \;,\quad \cos\mu = \frac{a-2y}{2l} \;,\quad \cos\nu = \frac{a-2z}{2l}$$

und die Beziehungen für die Winkel λ', μ', ν', welche die Normale zur Spiegelfläche mit denselben Kanten macht, bleiben auch in der entwickelten Form dieselben, wie früher, nämlich

$$\cos\lambda' = \frac{x y z}{2 0 x} \;,\quad \cos\mu' = \frac{x y z}{2 0 y} \;,\quad \cos\nu' = \frac{x y z}{2 0 z} \;;$$

die Bedingung, daß SS' zu dieser Normale parallel ist, wird demnach durch die fortlaufende Gleichung:

$$\frac{l x y z}{0} = (a-2x)\, x = (a-2y)\, y = (a-2z)\, z$$

ausgedrückt, aus welcher sich zwei unabhängige Gleichungen ziehen lassen, und zwar mit Einführung des constanten Factors $V' = \beta a^3$ folgende:

i.) $$\left\{\begin{array}{l} \left[12\beta a^4 - x y z\,(x+y)\left(1 - \left(\frac{z-a}{z}\right)^4\right)\right](x-y) = 0 \;, \\ \left[12\beta a^4 - x y z (x+z)\left(1 - \left(\frac{z-a}{z}\right)^4\right)\right](x-z) - 4 a x y z^2 \left(\frac{z-a}{z}\right)^3 = 0 \,. \end{array}\right.$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt, daß für eine Auflösung $x = y$ wird, und daß für andere Gleichgewichtslagen

k.) $$12\beta a^4 - x y z\,(x+y)\left[1 - \left(\frac{z-a}{z}\right)^4\right] = 0$$

sein muß; multiplizirt man diese Gleichung mit $(x+z)(x-z)$ und subtrahirt sie von der zweiten (i), nachdem diese mit $(x+y)$ multiplizirt worden, so folgt

$$3\beta a^3 (x-z)(y-z) - xy(x+y) z^2 \left(\frac{z-a}{z}\right)^3 = 0 \ , \quad (l.$$

und diese beiden Gleichungen (k) und (l) können nun mit (h) durch Elimination von x und y auf eine neue Gleichung in z allein führen, von deren Lösung die Bestimmung der Gleichgewichtslage abhängen wird.

Dazu und um die Gleichungen auch auf den früher schon behandelten Fall: $z=\infty$ leichter anwendbar zu machen, setze ich

$$\frac{z-a}{z} = u \quad , \qquad z = \frac{a}{1-u} \quad ,$$

und bemerke zugleich, daß für unsere Voraussetzungen u nur zwischen 0 und 1 liegen kann. Mit dieser Substitution hat man zunächst nach (h)

$$V' = \beta a^3 = \frac{1}{6}\, xy \frac{a}{1-u}(1-u^3) \quad , \qquad xy = \frac{6\beta a^2}{1+u+u^2} \ ; \quad (h'.$$

die Gleichung (k) nimmt die Form an:

$$12\beta a^3 - xy(x+y)\frac{1-u^4}{1-u} \quad , \qquad (k'.$$

und gibt mit dem vorstehenden Werth von xy

$$x+y = 2a\frac{1-u^3}{1-u^4} = 2a\frac{1+u+u^2}{(1+u)(1+u^2)} \ ; \qquad (m.$$

führt man endlich diese Werthe in die Gleichung (l) ein, so nimmt diese nach den erforderlichen Reductionen die Form an:

$$(1-u^4)(1+u)[1+u+u^2-6\beta(1+u^2)] = 0 \qquad (n.$$

und gibt demnach außer den Werthen $u=1$ und $u=-1$, von denen der erste dem Falle: $z=\infty$ entspricht, der zweite aber keine Bedeutung für uns hat, noch die reciproke Gleichung:

$$u^2(1-6\beta)+u+1-6\beta = 0 = 1+(1-6\beta)\left(u+\frac{1}{u}\right) \ ,$$

welche zuerst zeigt, daß für $\beta=\frac{1}{6}$ man $u=0$, $z=y=x=a$ erhält, wie früher, und welche allgemein aufgelöst, für u den Werth gibt:

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{3(1-4\beta)(12\beta-1)}}{2(1-6\beta)} .$$

Dieser zeigt, daß u überhaupt nur reelle Werthe erhalten kann, von $\beta = \frac{1}{12}$ bis $\beta = \frac{1}{4}$, daß aber an diesen Grenzen $u = -1$ und $u = +1$ wird, was leicht darauf führt, daß u von $\beta = \frac{1}{12}$ bis $\beta = \frac{1}{6}$ nur negative Werthe annimmt, wie man sich auch dadurch überzeugen kann, daß man $\beta = \frac{1}{6} + \delta$ setzt, wodurch der vorstehende Werth die Form:

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 144\,\delta^2}}{12\,\delta}$$

erhält und durch diese zeigt, daß es für ein positives δ zwischen 0 und $\frac{1}{12}$ immer zwei positive, für ein negatives δ zwischen denselben Grenzen zwei negative Werthe für u gibt. Aber selbst von den beiden positiven Werthen ist nur einer brauchbar, nämlich nur der, welcher kleiner als 1 ist, also nur

$$u = \frac{1 - \sqrt{1 - 144\,\delta^2}}{12\,\delta} ,$$

da auch $12\,\delta$ nicht größer als 1 werden darf. Führen wir nun den aus (n) gezogenen Werth:

$$6\,\beta = \frac{1 + u + u^2}{1 + u^2}$$

in den obigen Werth von xy ein und verbinden ihn mit dem von $x + y$, so folgt nach und nach

$$xy = a\,\frac{1}{1+u^2} \quad , \quad (x-y)^2 = 4a^2\left[\frac{(1+u+u^2)^2}{(1+u)^2(1+u^2)^2} - \frac{1}{1+u^2}\right] ,$$

$$x - y = 2a\,\frac{u}{(1+u)(1+u^2)} \;;$$

daraus folgt aber wieder in Verbindung mit $x + y$

$$x = a\,\frac{1+u}{1+u^2} \quad , \quad y = a\,\frac{1}{1+u}$$

und der erste dieser Werthe zeigt, daß wenn $u < 1$, $x > a$ wird, was wieder gegen unsere Voraussetzung ist. Die Bedingung (k) gibt dem=

nach keine Gleichgewichtslagen, als die besondern, schon in §. 66 behandelten Stellungen, für welche $u = 1$, $z = \infty$ wird, bei welchen also die eingetauchte Kante horizontal ist.

Es bleibt demnach noch der Fall $x = y = 0$ zu untersuchen übrig. Mit dieser Bedingung gibt die Gleichung (m)

$$x = a\,\frac{1 - u^3}{1 - u^4} = a\,\frac{1 + u + u^2}{(1+u)\,(1+u^2)}\,, \qquad (o.$$

die Gleichung (h′) wird

$$x^2 = a^2\,\frac{6\beta}{1 + u + u^2}\,, \qquad (o'.$$

und aus diesen beiden folgt die Beziehung:

$$(1+u+u^2)^3 - 6\beta\,(1+u)^2\,(1+u^2)^2 = 0$$

zwischen u und β. Man wird sich leicht überzeugen, daß diese Gleichung eine reciproke ist, und daß sie durch die Substitution

$$u + \frac{1}{u} = v \qquad (p.$$

auf die Form:

$$(v+1)^3 - v^2\,(v+2)\,6\beta = 0 \qquad (q.$$

gebracht werden kann. Aus der Gleichung (p) zieht man aber

$$u = \frac{v}{2} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4} - 1}$$

und schließt daraus, daß v nicht kleiner werden darf, als 2, daß nur der mit dem untern Zeichen sich ergebende Werth Bedeutung für uns haben kann, und daß dann den Grenzwerthen $u = 1$ und $u = 0$ die Grenzen $v = 2$ und $v = \infty$ entsprechen. Man wird sich ferner durch den Werth (o) von x überzeugen, daß x für alle Werthe von u zwischen 0 und 1 kleiner als a ist, daß also alle Werthe von v zwischen 2 und ∞ für unsere Untersuchung Bedeutung haben.

Anstatt daher die Gleichung (q) nach v aufzulösen, ist es vortheilhafter, für v eine Reihe von Werthen anzunehmen, mit diesen aus (q) das zugehörige β, aus

$$u = \frac{v}{2} - \sqrt{\frac{v^2}{4} - 1}$$

das entsprechende u, und aus (o) oder (o′) das entsprechende x zu berechnen. Für die Grenzwerthe $v = 2$ und $v = \infty$ ergibt sich so

$$\beta = \frac{9}{32}, \quad u = 1, \quad x = y = \frac{3}{4}a, \quad z = \infty$$

$$\beta = \frac{1}{6}, \quad u = 0, \quad x = y = z = a,$$

wie in §. 66 und oben im ersten Falle. Nimmt man dagegen $v = \frac{1}{2}$, so findet man die neuen Werthe:

$$u = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{343}{1350} = 0{,}254\ldots, \quad x = y = \frac{14}{15}a, \quad z = 2a;$$

für $v = 4$ wird $u = 2 - \sqrt{3}$, $z = a(2 + \sqrt{3}) = 3{,}732\ldots a$

$$\beta = \frac{125}{576} = 0{,}217\ldots, \quad x = y = \frac{5}{24}a\,(3 + \sqrt{3}) = 0{,}986\,a,$$

und so fort.

Endlich soll noch bemerkt werden, daß die Verhältnisse wieder ganz dieselben bleiben für den Fall, daß nur eine Kante des Würfels über dem Spiegel der Flüssigkeit liegt, wenn man $1 - \beta$ für β in die vorhergehenden Gleichungen einführt und die x, y und z auf den im höchsten Eck des Würfels zusammentreffenden Kanten mißt; ferner daß die Gleichungen (h′) und (m) für den besondern Werth: $u = 1$ auf die in §. 66 direct abgeleiteten Werthe für xy und $x + y$ zurückführen, welche unserer Voraussetzung, daß nur eine Kante eingetaucht sei, entsprechen.

§. 68.

Wenn ein Körper ganz in eine homogene Flüssigkeit eingetaucht und in dieser frei im Gleichgewicht ist, und wenn sein Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt des Volumens zusammenfällt, so ist derselbe, wie schon bemerkt wurde, in jeder Lage im Gleichgewicht, er befindet sich also in einem indifferenten oder gleichgültigen Gleichgewichtszustande, und man wird sich leicht überzeugen, daß dieser Zustand nur ein stabiler sein kann, wenn der Schwerpunkt des Körpers tiefer liegt, als der Mittelpunkt des Volumens, weil sich nur in diesem Falle durch eine kleine Drehung des Körpers aus dem aufwärtsgerichteten Druck der Flüssigkeit und dem abwärts gerichteten Gewicht des Körpers ein

Moment entstehen kann, welches in einem der Drehung des Körpers entgegengesetzten Sinne zu drehen strebt, wie es in Fig. 26 angedeutet ist.

Ist der Körper dagegen nur zum Theil eingetaucht, so ändert sich bei einer Drehung desselben auch die Form des eingetauchten Theiles und die Lage des Schwerpunktes dieses eingetauchten Theiles oder der verdrängten Flüssigkeit in Bezug auf den Schwerpunkt des ganzen Körpers; es wird daher die Stabilität des Gleichgewichtszustandes mehr von der Form des eingetauchten Körpers in der Nähe der Spiegelfläche der Flüssigkeit als von der höheren oder tieferen Lage seines Schwerpunktes abhängen, und man wird sich durch die Ansicht der Figuren 27 und 28 überzeugen, daß *es für die Stabilität des Gleichgewichtes in allen Fällen genügt, wenn bei einer kleinen Drehung des Körpers aus der Gleichgewichtslage die horizontale Projection des Schwerpunktes S'' der verdrängten Flüssigkeit in Bezug auf die horizontale Projection des Körper-Schwerpunktes S in demselben Sinne verschoben wird, wie ein über dem Schwerpunkt S liegender Punkt C*, weil es einleuchten wird, daß dann der aufwärts wirkende Druck $\mathfrak{P}$ mit dem Gewichte Q immer ein Moment geben muß, welches den Körper wieder in seine Gleichgewichtslage zurückzudrehen strebt.

Man drückt diese Bedingung für die Stabilität des Gleichgewichtszustandes eines schwimmenden Körpers auch in der Art aus, daß man sich durch den Schwerpunkt S'' Fig. 27, b, der verdrängten Flüssigkeit, wenn der schwimmende Körper um einen sehr kleinen Winkel aus der Gleichgewichtslage Fig. 27, a, geneigt worden ist, eine Verticale gezogen denkt und den Durchschnittspunkt C derselben mit der durch S und S' gezogenen, ursprünglich verticalen und mit dem Körper geneigten Geraden $S'SC$ bestimmt;*) der Gleichgewichtszustand ist dann offenbar stabil, wenn der Schnittpunkt C, welcher *Metacentrum* genannt wird, über dem Schwerpunkt S des Körpers liegt; dieser Zustand wird ein indifferenter sein, wenn S und C zusammenfallen, und er wird nicht stabil sein, sondern der Körper in eine andere Gleichgewichtslage übergehen, wenn C tiefer als S liegt.

---

*) Oder richtiger den Schnittpunkt der Geraden SC mit einer durch S'' gelegten, verticalen und zu der Drehungsachse des Körpers parallelen *Ebene*, da sich die SC und die durch S'' gelegte verticale *Gerade* im Allgemeinen nicht schneiden.

Auf einer schweren tropfenbildenden Flüssigkeit kann demnach ein nur theilweise eingetauchter Körper stabil schwimmen, wenn auch sein Schwerpunkt über dem Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit liegt; die Stabilität des Gleichgewichtszustandes wird indessen immer um so größer sein, je tiefer der Schwerpunkt des Körpers liegt, und jedenfalls am gesichertsten sein, wenn er unter dem Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit liegt.

Im Allgemeinen besteht die Stabilität auch für größere Drehungen des Körpers, wenn sie für sehr kleine Drehungen nachgewiesen ist; es leuchtet jedoch ein, daß wenn es mehrere stabile Gleichgewichtslagen gibt, die Drehung eine gewisse Grenze zwischen zwei benachbarten Lagen nicht überschreiten darf, weil sonst der Körper in die nächste Lage übergehen und nicht mehr in die ursprüngliche Gleichgewichtslage zurückkehren wird. Damit dieser Fall eintreten kann, muß sich der Schwerpunkt S″ Fig. 28, welcher sich beim Beginn der Drehung aus der Verticalen durch S im Sinne von C entfernt hat, bei fortgesetzter Drehung dieser Verticalen wieder nähern und dann auf die entgegengesetzte Seite übergehen; die vorgenannte Grenze für die Drehung wird also erreicht, wenn S″ in die Verticale durch S gekommen ist, also wenn der Körper eine neue, aber wie leicht zu sehen, nicht stabile Gleichgewichtslage erhalten hat, da von dieser Lage an die horizontale Projection von S″ sich immer in entgegengesetztem Sinne von C bewegt, und man wird daraus ferner schließen, daß es zwischen zwei stabilen Gleichgewichtslagen immer wenigstens eine nicht stabile geben muß.

§. 69.

Um nun die Bedingung für das stabile Gleichgewicht eines zum Theil eingetauchten Körpers auch analytisch auszudrücken, nehmen wir den Spiegel der Flüssigkeit MN, Fig. 29 als xy-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen x-Achse in der Spiegelfläche zunächst noch eine beliebige Lage habe, und denken uns in Bezug auf dieses den Schwerpunkt S des schwimmenden Körpers durch die Coordinaten x, y und z, und den Schwerpunkt S′ der verdrängten Flüssigkeit durch die Coordinaten x', y', z' bestimmt. Ist dann Q das Gewicht des Körpers, V′ das Volumen der als homogen vorausgesetzten Flüssigkeit, und p′ ihr specifisches Gewicht, so sind die Bedingungen für die Gleichgewichtslage:

$$p' V' = Q \quad , \quad x' = x \quad , \quad y' = y \quad .$$

Anstatt nun den Körper zu drehen, denken wir uns den Spiegel der Flüssigkeit um einen kleinen Winkel $\Delta\tau$ gedreht, oder was dasselbe ist, wir denken uns den Körper und den ersten Spiegel M N durch einen zweiten m n unter einem Winkel $\Delta\tau$ gegen diesen geschnitten, und bestimmen nun das Volumen V″ des neuen Körperabschnittes m Z n und die Coordinaten x″, y″, z″ des Schwerpunktes S″ der von diesem Abschnitt verdrängten Flüssigkeit. Da aber der Körper bei dieser Lage gegen den Spiegel m n sich noch schwimmend verhalten, also nicht sinken und nicht steigen soll, so muß

$$Q = p' V'' \quad , \qquad V'' = V'$$

sein, und diese Bedingung wird dazu dienen die Lage der Schnittlinie C beider Spiegelflächen für den Anfang der Drehung zu bestimmen. Der Raum V″ besteht nämlich aus dem Raum $MZN = V'$ plus den Sector n C N, weniger den Sector M C m; nehmen wir also die Schnittlinie C als Polarachse, den Spiegel M N als Polar-Ebene eines Kugel-Coordinatensystems und die Umhüllungsfläche des Körpers in Bezug auf dieses durch eine Gleichung: $r = f(\omega, \vartheta)$ gegeben, so haben wir (Buch II, §. 75), indem wir das Azimuth ω von C M oder C X aus zählen,

$$\textit{Sector}\, MOm = \int_0^{\Delta\tau} d\omega \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{r} dr \,.\, r^2 \sin\vartheta = F(\Delta\tau) - F(0) \;,$$

$$\textit{Sector}\, NOn = \int_{\pi}^{\pi+\Delta\tau} d\omega \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{r} dr \,.\, r^2 \sin\vartheta = F(\pi+\Delta\tau) - F(\pi) \;,$$

damit folgt

$$V'' - V' = \Delta V' = F(\pi+\Delta\tau) - F(\pi) - [F(\Delta\tau) - F(0)]$$

und da der Anfangswerth des Verhältnisses $\frac{\Delta V'}{\Delta\tau}$ Null werden soll, so wird

$$\textit{Anf:} \frac{F(\pi+\Delta\tau) - F(\pi)}{\Delta\tau} - \textit{Anf:} \frac{F(\Delta\tau) - F(0)}{\Delta\tau} = F'(\pi) - F'(0) = 0 \,.$$

Es ist aber auch allgemein nach den vorstehenden Werthen

$$F'(\omega) = \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{r} dr \;.\; r^2 \sin\vartheta \;,$$

und es können die besondern Werthe $F'(\pi)$ und $F'(0)$ nur darin beschränkt sein, daß die darin vorkommenden Werthe von r nur dem $\omega = 0$ und $\omega = \pi$ entsprechen, oder nur der Spiegelfläche M N angehören, so daß man hat

$$F'(\pi) - F'(0) = \int_0^\pi d\vartheta \left[\int_0^{f(\pi,\vartheta)} dr . r^2 \sin\vartheta - \int_0^{f(0,\vartheta)} dr . r^2 \sin\vartheta\right] = \int_0^\pi d\vartheta \int_{f(0,\vartheta)}^{f(\pi,\vartheta)} dr . r^2 \sin\vartheta ,$$

oder wenn man nun den Winkel ϑ in der Spiegelfläche von 0 bis 2π rechnet,

$$141.)\qquad F'(\pi) - F'(0) = 0 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{f(0,\vartheta)} dr . r^2 \sin\vartheta \ .$$

Vergleicht man aber diesen Ausdruck mit der letzten der Gleichungen (30) in §. 42 des zweiten Buches unter Beachtung, daß in unserm jetzigen Falle ϑ das Azimuth in der Ebene M N geworden ist, so wird man erkennen, daß die Bedingung $F'(\pi) - F'(0) = 0$ auf die Form: $O X = 0$ zurückkommt, wenn O den Flächeninhalt des von der Umhüllungsfläche des Körpers begrenzten Stückes der Spiegelfläche M N, und X den senkrechten Abstand des Mittelpunktes (Schwerpunktes) dieses Stückes von der Schnittlinie C bezeichnet; diese Bedingung verlangt demnach, daß diese Schnittlinie der beiden Flächen M N und m n für den Anfang der Drehung durch den Schwerpunkt von M N gehen muß, wenn das Volumen des eingetauchten Körpertheiles ungeändert bleiben soll.

Behalten wir nun die Schnittlinie C als y=Achse bei, und legen die xz=Ebene durch den Schwerpunkt der Figur M N, so haben wir mit der Beachtung, daß der Winkel ϑ von der y=Achse, der Winkel ω von der x=Achse aus gegen die z=Achse gezählt wird, und wenn wir die Doppel=Integrale:

$$\int_0^\pi d\vartheta \int_0^r dr . r^3 \sin^2\vartheta \quad \text{und} \quad \int_0^\pi d\vartheta \int_0^r dr . r^3 \sin\vartheta \cos\vartheta$$

zunächst durch $\Phi_1(\omega)$ und $\Phi_2(\omega)$ ersetzen, für die Coordinaten x'', y'', z'' des Schwerpunktes S'' die Beziehungen:

$$V''x'' = V'x' - \int_{\pi}^{\pi+\Delta\tau} d\omega \,.\, \cos\omega\; \Phi_1(\omega) - \int_0^{\Delta\tau} d\omega \,.\, \cos\omega\; \Phi_1(\omega) \,,$$

$$V''y'' = V'y' + \int_{\pi}^{\pi+\Delta\tau} d\omega \,.\, \Phi_2(\omega) - \int_0^{\Delta\tau} d\omega \,.\, \Phi_2(\omega) \,,$$

$$V''z'' = V'z' - \int_{\pi}^{\pi+\Delta\tau} d\omega \,.\, \sin\omega\; \Phi_1(\omega) - \int_0^{\Delta\tau} d\omega \,.\, \sin\omega\; \Phi_1(\omega) \,,$$

und demnach wie oben, wenn noch

$$\int_0^{\omega} d\omega \,.\, \cos\omega\; \Phi_1(\omega) = F_1(\omega) \,, \quad \int_0^{\omega} d\omega \,.\, \sin\omega\; \Phi_1(\omega) = F_3(\omega) \,,$$

$$\int_0^{\omega} d\omega \,.\, \Phi_2(\omega) = F_2(\omega)$$

gesetzt wird, für den Anfang der Drehung die Anfangswerthe:

$$Anf{:}\; \frac{V''x'' - V'x'}{\Delta\tau} = Anf{:}\; \frac{\Delta \,.\, V'x'}{\Delta\tau} = - F_1'(\pi) - F_1'(0) \,,$$

$$Anf{:}\; \frac{V''y'' - V'y'}{\Delta\tau} = Anf{:}\; \frac{\Delta \,.\, V'y'}{\Delta\tau} = F_2'(\pi) - F_2'(0) \,,$$

$$Anf{:}\; \frac{V''z'' - V'z'}{\Delta\tau} = Anf{:}\; \frac{\Delta \,.\, V'z'}{\Delta\tau} = - F_3'(\pi) - F_3'(0) \,.$$

Es ist aber auch

$$F_1'(\omega) = \cos\omega\; \Phi_1(\omega) = \cos\omega \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{r} dr \,.\, r^3 \sin^2\vartheta \,,$$

$$F_3'(\omega) = \sin\omega\; \Phi_1(\omega) = \sin\omega \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{r} dr \,.\, r^3 \sin^2\vartheta \,,$$

$$F_2'(\omega) = \Phi_2(\omega) = \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{r} dr \,.\, r^3 \sin\vartheta\; \cos\vartheta \,,$$

und daraus folgen mit $r = f(\omega, \vartheta)$ die Anfangswerthe:

$$Anf: \frac{\Delta . V'x'}{\Delta \tau} = -\cos\pi \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{f(\pi,\vartheta)} dr . r^3 \sin^2\vartheta - \cos 0 \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{f(0,\vartheta)} dr . r^3 \sin^2\vartheta \,,$$

$$= \int_0^\pi d\vartheta \left(\int_0^{f(\pi,\vartheta)} dr \,.\, r^3 \sin^2\vartheta - \int_0^{f(0,\vartheta)} dr \,.\, r^3 \sin^2\vartheta \right)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{f(0,\vartheta)} dr \,.\, r^3 \sin^2\vartheta \quad ,$$

$$Anf: \frac{\Delta . V'z'}{\Delta \tau} = -\sin\pi \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{f(\pi,\vartheta)} dr . r^3 \sin^2\vartheta - \sin 0 \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{f(0,\vartheta)} dr . r^3 \sin^2\vartheta = 0 \,,$$

$$Anf: \frac{\Delta . V'y'}{\Delta \tau} = \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{f(\pi,\vartheta)} dr . r^3 \sin\vartheta \cos\vartheta - \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{f(0,\vartheta)} dr . r^3 \sin\vartheta \cos\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{f(0,\vartheta)} dr \,.\, r^3 \sin\vartheta \cos\vartheta \quad .$$

Führen wir dann den ersten und letzten dieser Werthe mit der Gleichung (141) auf rechtwinklige Coordinaten zurück, indem wir die Begrenzungscurve des in dem Körper eingeschlossenen Stückes der Ebene MN durch die Gleichung:

$$f(x, y) = 0$$

dargestellt, und daraus die Werthe:

$$y_1 = \varphi_1(x) \quad , \qquad y_0 = \varphi_0(x)$$

gezogen voraussetzen, so erhalten wir

$$Anf: \frac{\Delta V'}{\Delta \tau} = \int_{a_0}^{a_1} dx \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} dy \,.\, x = 0 \quad ,$$

$$Anf: \frac{\Delta . V'x'}{\Delta \tau} = \int_{a_0}^{a_1} dx \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} dy \,.\, x^2 \,, \qquad Anf: \frac{\Delta . V'y'}{\Delta \tau} = \int_{a_0}^{a_1} dx \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} dy \,.\, xy \,,$$

und werden bald erkennen, daß man den zweiten dieser Werthe analog dem Ausdruck: $\Sigma \,.\, m r^2 = \int d x \int d y \int d z \,.\, q (x^2 + y^2)$ für einen Körper, und in ähnlicher Weise, wie man den Begriff: Schwerpunkt von einem Körper auf eine Fläche und eine Curve überträgt, als das Massenmoment einer materiellen Ebene (des von dem Körper eingeschlossenen Theiles der Spiegelfläche M N) von der Dichte $q = 1$ in Bezug auf die y-Achse erklären, oder einfacher, mit Weglassung des Begriffes: Masse und Dichte, das Flächenmoment jener ebenen Figur in Bezug auf die y-Achse nennen und durch $0 k^2$ darstellen kann; der letzte der vorhergehenden Werthe wird dann der Form $\Sigma \,.\, m x y$ für einen Körper entsprechen, und durch die Bedingung: $\Sigma \,.\, m x y = \int d x \int d y \,.\, x y = 0$ oder $\lesseqgtr 0$ andeuten, ob die angenommene Drehungsachse, unsere Schnittlinie C, eine Hauptachse im Schwerpunkt der ebenen Figur MN ist oder nicht.

Ist nun zuerst diese Gerade eine solche Hauptachse, also $Anf\colon \frac{\Delta \,.\, V' y'}{\Delta \tau} = 0$, so wird der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit kein Bestreben haben, bei einer kleinen Drehung des Körpers um jene Gerade aus der zu ihr senkrechten Ebene herauszutreten; die Bedingung der Stabilität des Gleichgewichtes wird also einfach darin bestehen, daß die Projection s von S auf die m n oder auf die Achse C X' im Sinne der positiven x über die Projection s'' von S'' hinausfällt, daß man also hat

$$\mathfrak{z} \sin \tau - \mathfrak{x} \cos \tau > \mathfrak{z}'' \sin \tau - \mathfrak{x}'' \cos \tau \quad ,$$

wenn $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ die Coordinaten von S sind, oder da $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}'$, und wenn man $SS' = h$, also $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}' - h$ setzt und die ganze Gleichung mit $V' = V''$ multiplizirt,

$$V' h \sin \Delta\tau + (V'' \mathfrak{z}'' - V' \mathfrak{z}') \sin \Delta\tau < (V'' \mathfrak{x}'' - V' \mathfrak{x}') \cos \Delta\tau \;;$$

daraus folgt aber für den Anfang der Drehung

$$Anf\colon \left(V' h \frac{\sin \Delta\tau}{\Delta\tau} + \frac{\Delta \,.\, V' \mathfrak{z}'}{\Delta\tau} \sin \Delta\tau\right) < Anf\colon \frac{\Delta \,.\, V' \mathfrak{x}'}{\Delta\tau} \cos \Delta\tau$$

oder mit den vorausgegangenen Werthen

$$V' h < \int_{a_0}^{a_1} d x \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} d y \,.\, x^2 \quad \text{oder} \quad < 0 k^2 \;. \qquad (142.$$

Wenn diese Bedingung für diejenige der beiden Hauptachsen in C befriedigt wird, in Bezug auf welche das Flächenmoment $O k^2$ das kleinere ist, so ist sie offenbar auch in Bezug auf die andere jener Hauptachsen, und in Folge dessen auch in Bezug auf jede andere durch den Schwerpunkt der Figur MN gelegte Achse befriedigt. Denn nach der Theorie der drehenden Bewegung eines Körpers um einen Punkt in §. 184, u. ff. des zweiten Buches kann man sich eine solche Bewegung, die in jedem Augenblick um eine andere augenblickliche Drehungsachse stattfindet, immer nach drei andern unter sich rechtwinkligen Achsen zerlegt denken; im jetzigen Falle, wo die augenblickliche Drehungsachse für den Anfang der Drehung immer senkrecht zur verticalen z-Achse ist, kann man daher die Drehung um eine beliebige durch C gehende gerade durch zwei Drehungen um die x- und y-Achse ersetzen, und die Stabilität des Gleichgewichtes überhaupt wird daher nur von der Stabilität in Bezug auf diese beiden Drehungen abhängen. Dazu kann überdieß bemerkt werden, daß, in ähnlicher Weise wie es für die Massemomente gefunden wurde, das kleinere von den Flächenmomenten in Bezug auf die beiden Hauptachsen überhaupt das kleinste ist unter allen Flächenmomenten der Figur MN in Bezug auf eine in der Ebene MN durch C gehende Gerade, daß also $V' h$ kleiner sein wird, als jedes Flächenmoment der Figur MN, wenn es kleiner ist als das kleinere von den beiden Flächenmomenten in Bezug auf die beiden Hauptachsen.

Wir kommen dadurch zu dem Schluß, daß die Stabilität des Gleichgewichts eines schwimmenden Körpers für kleine Drehungen gesichert ist, wenn die Ungleichheit (142) hinsichtlich des kleineren der beiden Flächenmomente des in dem Körper enthaltenen Theiles der Spiegelfläche der Flüssigkeit in Bezug auf die beiden Hauptachsen im Schwerpunkt dieser ebenen Figur stattfindet, d. h. wenn das Product aus dem Volumen V' der verdrängten Flüssigkeit in die Höhe h, um welche der Körper-Schwerpunkt S **über** dem Schwerpunkt S'' der verdrängten Flüssigkeit liegt, kleiner ist, als das kleinere der genannten Flächenmomente.

Diese Bedingung wird natürlich immer erfüllt, wenn $h = 0$ oder < 0 ist, wenn also die beiden Schwerpunkte S und S' zusammenfallen oder S unter S' liegt.

§. 70.

Zur Anwendung des Vorhergehenden betrachten wir zuerst den homogenen Würfel in einer solchen Gleichgewichtslage, daß seine Kanten

horizontal und vertical sind; das specifische Gewicht desselben sei p, das der Flüssigkeit, in welche er eingetaucht ist, $= p'$, und die Länge seiner Kanten $= a$; man hat dann

$$V' = \frac{p}{p'} V = \beta V = \beta a^3 \quad ,$$

und für die Tiefe c der Eintauchung und den Abstand h der beiden Schwerpunkte S und S' ergibt sich

$$c = \beta a \quad , \qquad h = \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} c = \frac{1}{2} a (1-\beta) \quad ;$$

ferner hat man

$$O k^2 = \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} dx \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} dy \,.\, x^2 = \frac{1}{12} a^4 \quad ,$$

und die Bedingung (142) wird damit

$$\frac{1}{2} \beta a^4 (1-\beta) < \frac{1}{12} a^4 \qquad \text{oder} \qquad 6\beta (1-\beta) < 1 \quad ,$$

woraus für β die Grenzwerthe

$$\beta = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$$

folgen. Damit also ein Würfel in der obigen Lage stabil schwimmt, muß man für das Verhältniß β der specifischen Gewichte des Körpers und der Flüssigkeit haben

$$\beta > \frac{3+\sqrt{3}}{6} \text{ oder } > 0{,}7886\ldots \text{ und } < \frac{3-\sqrt{3}}{6} \text{ oder } < 0{,}2113\ldots ;$$

zwischen diesen Werthen gibt es keine Stabilität für jene Lage. So zeigt die Erfahrung, daß ein Würfel von hartem Holze und dem specifischen Gewichte 0,85 auf Quecksilber, für welches $\beta = \frac{0{,}85}{13{,}5} = 0{,}062\ldots$, und in Wasser, für welches $\beta = 0{,}85$ wird, in der bezeichneten Lage stabil schwimmt, daß dagegen weder ein Würfel von leichtem Holz und dem specifischen Gewicht 0,45 in Wasser, noch ein Würfel von Eisen (specif. Gew. $= 7{,}8$) in Quecksilber ($\beta = 0{,}57\ldots$) in jener Lage erhalten werden kann.

Wenn nur vier Kanten des Würfels horizontal und die übrigen gegen die Verticale gleich geneigt sind, Fig. 22, b, so ist der Durchschnitt desselben mit der Spiegelfläche der Flüssigkeit ein Rechteck, dessen Seiten a und $2\,a\sqrt{\beta}$ oder $2\,a\sqrt{1-\beta}$ sind, je nachdem $\beta <$ oder $> \frac{1}{4}$ ist. Als Flächenmomente desselben in Bezug auf die beiden Hauptachsen hat man für $\beta < \frac{1}{4}$

$$\int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} dx \int_{-a\sqrt{\beta}}^{a\sqrt{\beta}} dy \,.\, x^2 = \frac{1}{6} a^4 \sqrt{\beta} \quad \text{und} \quad \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} dx \int_{-a\sqrt{\beta}}^{a\sqrt{\beta}} dy \,.\, y^2 = \frac{2}{3} a^4 \sqrt{\beta^3} \,,$$

und es kommt auf den Werth von β an, ob das erstere oder das letztere das kleinere ist; man wird leicht finden, daß sie für $\beta = \frac{1}{4}$ gleich werden, und für $\beta < \frac{1}{4}$ das zweite, für $\beta > \frac{1}{4}$ das erstere das kleinere Flächenmoment ist.

Die Tiefe c der Eintauchung ist $= a\sqrt{\beta}$, und daher

$$h = \frac{1}{2}\, a \sqrt{2} - \frac{2}{3}\, a \sqrt{\beta} = \frac{1}{6}\, a \left(3\sqrt{2} - 4\sqrt{\beta}\right),$$

und da immer $V' = \beta a^3$ ist, so wird die Bedingung (142) für $\beta < \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{6}\, \beta \left(3\sqrt{2} - 4\sqrt{\beta}\right) < \frac{2}{3}\, \beta \sqrt{\beta} \quad ,$$

für $\beta > \frac{1}{4}$ dagegen

$$\frac{1}{6}\, \beta \left(3\sqrt{2} - 4\sqrt{\beta}\right) < \frac{1}{6} \sqrt{\beta} \quad .$$

Die erste Ungleichheit führt auf

$$8\sqrt{\beta} > 3\sqrt{2} \quad , \qquad \beta > \frac{9}{32} \,,$$

was aber schon größer ist als $\frac{1}{4}$; es gibt also für $\beta < \frac{1}{4}$ keine Stabilität für die betreffende Lage des Würfels. Setzt man dann in der zweiten Ungleichheit $\sqrt{\beta} = u$, so nimmt sie die Form:

$$4\,u^2 - 3\,u\sqrt{2} + 1 > 0$$

an und gibt für die Grenzen von $u^2 = \beta$

$$\beta = \left(\frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{8}\right)^2 = \frac{1}{32}(3 \pm 1)^2 \quad ;$$

es müßte also $\beta > \frac{1}{2}$ und $< \frac{1}{8}$ werden, wenn diese Ungleichheit stattfinden sollte, und es folgt daraus, daß die betreffende Gleichgewichtslage des Würfels nur dann stabil wird oder vielmehr gerade die Grenze der Stabilität erreicht, wenn β genau $= \frac{1}{2}$ ist, und zwei gegenüberliegende Kanten desselben gerade in die Spiegelfläche der Flüssigkeit zu liegen kommen.

Wenn $\beta > \frac{1}{2}$, so hat man, wie schon angedeutet, $1 - \beta$ für β in die vorhergehenden Bedingungen zu setzen, und wird daraus schließen, daß überhaupt nur der einzige Fall $\beta = \frac{1}{2}$ eine an Stabilität grenzende Gleichgewichtslage von solcher Art, daß nur zwei Seitenflächen vertical und die übrigen gegen den Spiegel der Flüssigkeit gleich geneigt sind, zuläßt.

Ganz ähnliche Lagen sind auch die in §. 66 gefundenen und in Fig. 24 dargestellten Gleichgewichtslagen, wenn nur eine Kante in der Spiegelfläche liegt und diese eine der geneigten Seitenflächen des Würfels halbirt. Für einen dieser Fälle ist $\beta = \frac{1}{4}$, und man wird bald finden, daß man dazu hat

$$SS' = h = \frac{1}{6}a\sqrt{5}\,, \quad Qk^2 = \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} dx \int_{-\frac{1}{4}a\sqrt{5}}^{\frac{1}{4}a\sqrt{5}} dy \,.\, x^2 = \frac{1}{24}a^4\sqrt{5}\,, \quad V' = \frac{1}{4}a^3\,,$$

und folglich

$$V'h = Ok^2 = \frac{1}{24}\,a^4\sqrt{5} \quad .$$

Nehmen wir endlich den Würfel noch in einer solchen Gleichgewichtslage, daß die Raum-Diagonale lothrecht steht, und setzen zuerst voraus, daß nur ein Eck eingetaucht, β also $<$ oder höchstens $= \frac{1}{6}$ sei. Für diesen Fall findet man für die geneigten Kanten der eingetauchten Pyramide die Länge $s' = a\sqrt[3]{6\beta}$, für die horizontalen Kanten $s = a\sqrt{2}\,\sqrt[3]{6\beta}$, die Höhe dieser Pyramide $c = \frac{1}{3}s'\sqrt{3}$, die halbe Raumdiagonale $= \frac{1}{2}a\sqrt{3}$ und daher für den Abstand der Schwerpunkte S und S'

$$h = \frac{1}{2}a\sqrt{3} - \frac{3}{4}c = \frac{1}{4}a\sqrt{3}\left(2 - \sqrt[3]{6\beta}\right) \quad ;$$

die beiden Flächenmomente der gleichseitigen Grundfläche der eingetauchten Pyramide in Bezug auf deren Hauptachsen sind einander gleich und zwar

$$Ok^2 = 2\int_0^{\frac{1}{2}s} dx \int_0^{(\frac{1}{2}s-x)\sqrt{3}} dy \,.\, x^2 = \frac{1}{96} s^4 \sqrt{3} = \frac{1}{4} a^4 \beta \sqrt{3} \sqrt[3]{6\beta} \;;$$

die Bedingung (142) wird demnach

$$\frac{1}{4} \beta a^4 \sqrt{3} \left(2-\sqrt[3]{6\beta}\right) < \frac{1}{4} \beta a^4 \sqrt{3} \sqrt[3]{6\beta} \quad , \quad \beta > \frac{1}{6} \,,$$

und zeigt, daß es von $\beta = 0$ bis $\beta = \frac{1}{6}$ und folglich auch von $\beta = \frac{5}{6}$ bis $\beta = 1$ keine stabile Gleichgewichtslage der zuletzt erwähnten Art geben kann, daß aber für $\beta = \frac{1}{6}$ und mithin auch für $\beta = \frac{5}{6}$ selbst die Grenze der Stabilität erreicht wird.

Von $\beta = \frac{1}{6}$ bis $\beta = \frac{5}{6}$ taucht der Würfel mit 4 Ecken ein und der Durchschnitt desselben mit dem Spiegel der Flüssigkeit ist ein Sechseck mit je drei gleichen längeren und kürzeren Seiten, welches aber für $\beta = \frac{1}{2}$ regelmäßig wird; der eingetauchte Theil kann daher als eine dreiseitige Pyramide angesehen werden, an welcher die drei Ecken der Grundfläche durch parallele Ebenen zu den schiefen Seitenflächen abgestumpft sind. Nennt man die drei geneigten Kanten dieser Pyramide s_1, die horizontalen Seiten der Grundfläche s_2, so hat man

$$\text{a.)} \qquad V' = \frac{1}{6} s_1^3 - 3 \,.\, \frac{1}{6} (s_1 - a)^3 = \beta a^3 \quad ,$$

und daraus folgt wenn man noch wie früher $\frac{s_1 - a}{s_1} = u$, $s_1 = \frac{a}{1-u}$ setzt, die Bedingung:

$$\text{a'.)} \qquad 1 - 3u^3 = 6\beta (1-u)^3$$

zur Bestimmung von u aus β oder umgekehrt. Man zieht aus derselben mit der Beachtung, daß u überhaupt nur zwischen 0 und 1 liegen kann, leicht die Werthe:

$$u = 0 \text{ für } \beta = \frac{1}{6} \;,\quad u = \frac{1}{3} \text{ für } \beta = \frac{1}{2} \;,\quad u = \frac{1}{2} \text{ für } \beta = \frac{5}{6} \,,$$

und schließt daraus, daß für unsern Fall u auf die Werthe von 0 bis $\frac{1}{2}$, s_1 also auf die Werthe von a bis 2a beschränkt ist.

Für die Tiefe der Eintauchung ergibt sich wie oben $c = \frac{1}{2} s_1 \sqrt{3}$, und den Abstand z' des Schwerpunktes des eingetauchten Theiles von dem untersten Eck findet man durch die Gleichung:

$$V' z' = \frac{1}{6} s_1^3 \cdot \frac{3}{4} c - 3 \cdot \frac{1}{6} (s_1 - a)^3 \left(c - \frac{1}{4} c'\right)$$

$$= \frac{1}{24} s_1^4 \sqrt{3} - \frac{1}{2} (s_1 - a)^3 \left(\frac{1}{3} s_1 \sqrt{3} - \frac{1}{12} (s_1 - a) \sqrt{3}\right),$$

oder wenn man den Werth von $\frac{1}{2} (s_1 - a)^3$ aus dem obigen Werthe von V' entnimmt und reduzirt,

$$V' z' = \left(\frac{1}{12} \beta a^4 + \frac{1}{4} \beta s_1 a^3 - \frac{1}{72} s_1^3 a\right) \sqrt{3}$$

und daraus folgt

(b.

$$V' h = V' \left(\frac{1}{2} a \sqrt{3} - z'\right) = \frac{1}{72} a \sqrt{3} (30 \beta a^3 - 18 \beta s_1 a^2 + s_1^3) .$$

Die Schnittfläche des Würfels mit der Spiegelebene der Flüssigkeit kann als ein gleichseitiges Dreieck betrachtet werden, dessen Seiten die Länge $s_2 = s_1 \sqrt{2}$ haben, und von welchem drei ähnliche Dreiecke mit den Seiten $s_2' = (s_1 - a) \sqrt{2}$ abgeschnitten sind, Fig. 30. Die Flächenmomente dieser Figur sind für alle durch ihren Mittelpunkt gezogene Geraden gleich, und um sie zu berechnen, wird man zuerst schließen, daß das Flächenmoment des Sechseckes um die Flächenmomente der drei kleinen Dreiecke kleiner ist, als das des großen Dreieckes, und kann dann einen den Massemomenten analogen Satz anwenden, nämlich, daß das Flächenmoment eines kleinen Dreieckes in Bezug auf die Hauptachse AB der ganzen Figur aus dem Flächenmoment desselben in Bezug auf eine parallele Achse ab durch seinen Schwerpunkt o und aus dem Massemoment der in diesem Punkt concentrirten Fläche in Bezug auf die erste Achse zusammengesetzt ist. Für eines der kleinen Dreiecke ergibt sich darnach das Flächenmoment einfach $= \frac{1}{96} s_2'^4 \sqrt{3}$; für die beiden andern dagegen hat man zuerst den Abstand BC zu bestimmen, und dieser ist offenbar constant und gleich dem Abstand des vertical unter o liegenden eingetauchten Eckes von der durch AB und die verticale Raumdiagonale gelegten Ebene oder gleich dem halben Abstand zweier eingetauchten Ecken, also $= \frac{1}{2} a \sqrt{2}$. Das Flächenmoment eines dieser

kleinen Dreiecke in Bezug auf die Achse A B ist demnach $= \frac{1}{96} s_2'^4 \sqrt{3}$ $+ \frac{1}{2} a^2 . \frac{1}{4} s_2'^2 \sqrt{3}$ und für das Sechseck hat man demnach

$$O k^2 = \frac{1}{96} s_2^4 \sqrt{3} - \frac{3}{96} s_2'^4 \sqrt{3} - 2 . \frac{1}{8} a^2 s_2'^2 \sqrt{3}$$

oder mit Einführung der Werthe für s_2, s_2' und $\frac{1}{2}(s_1 - a)^3$

$$O k^2 = \frac{1}{24} a \sqrt{3} \, [s_1^3 - 12 a s_1^2 + (24 + 6\beta) a^2 s_1 - (12 + 6\beta) a^3] \, .$$

Die Bedingung: $V' h < O k^2$ nimmt damit und mit dem Werthe (b) nach einigen Reductionen die Form:

$$s_1^3 - 18 a s_1^2 + 18 (2 + \beta) a^2 s_1 - 6 (3 + 4\beta) a^3 > 0$$

an, und wenn man dazu die aus (a) gezogene Gleichung:

$$- s_1^3 + \frac{9}{2} a s_1^2 - \frac{9}{2} a^2 s_1 + \frac{3}{2} (1 - 2\beta) a^3 = 0$$

addirt, so ergibt sich als Bedingung der Stabilität

$$9 s_1^2 - 3 (7 + 4\beta) a s_1 + (11 + 18\beta) a^2 < 0 \quad .$$

Diese Bedingung enthält aber noch gleichzeitig s_1 und β, sie kann daher nur geprüft werden, wenn durch die Gleichung (a) oder (a′) s_1 je nach dem gegebenen β bestimmt worden ist. Eliminirt man aber β aus der letzten Ungleichheit mittels der Gleichung (a′) nachdem man s' durch u ersetzt hat, so findet man folgende nur von u abhängige Bedingung der Stabilität,

$$u (10 u^3 - 13 u^2 + 6 u - 1) < 0 \quad ,$$

welche für alle Werthe von $u = 0$ bis $u = \frac{1}{2}$ also auch für alle Werthe von $\beta = \frac{1}{6}$ bis $\beta = \frac{5}{6}$ befriedigt und deren linke Seite an den genannten Grenzen selbst Null wird, wie in dem vorhergehenden Falle, wo nur ein Eck eintauchte oder nur ein Eck frei war. Wenn $\beta = \frac{1}{6}$ oder $\beta = \frac{5}{6}$ ist, wenn sich also drei Ecken des Würfels gerade im Spiegel der Flüssigkeit befinden, so ist der Gleichgewichtszustand desselben gerade an der Grenze der Stabilität, und zwischen dieser Werthen von β wird ein Würfel immer so schwimmen, daß eine Raumdiagonale vertical ist und vier Ecken desselben eingetaucht sind. Beispiele dafür sind ein

Würfel von leichtem Holz in Wasser und ein Würfel von Eisen in Quecksilber.

Nach diesen Untersuchungen wird es dem Leser nicht schwer fallen, unter den drei Gleichgewichtslagen eines homogenen rechtwinkligen Parallelepipeds mit drei ungleichen Kanten oder eines homogenen Ellipsoids mit drei ungleichen Achsen, in welcher eine der drei Kanten oder Achsen vertical ist, diejenige zu bestimmen, in welcher diese Körper stabil schwimmen, oder zu beweisen, daß es nur diejenige Lage sein kann, bei welcher die kleinste Kante oder Achse vertical ist.

§. 71.

Werfen wir endlich noch einen Blick auf den Gleichgewichtszustand eines Körpers, welcher nicht frei in einer Flüssigkeit schwimmt, sondern in derselben mittels eines festen Hindernisses im Gleichgewicht erhalten wird.

Für diesen Gleichgewichtszustand haben wir den Bedingungen (134) noch die unbekannten Widerstände jener Hindernisse beizufügen, und die Zahl dieser Bedingungen wird hinreichen, einerseits die unbekannten Widerstände zu eliminiren und die nothwendigen Bedingungen zwischen den gegebenen Kräften und dem Druck der Flüssigkeit aufzustellen, und anderseits jene Widerstände selbst der Größe und Richtung nach zu bestimmen.

Nehmen wir z. B. einen schweren Körper, welcher in einer homogenen schweren Flüssigkeit ganz oder zum Theil eingetaucht und in einem Punkte unterstützt ist, lassen die z-Achse des Coordinatensystems mit der Richtung der Schwere zusammenfallen, und bezeichnen die rechtwinkligen Componenten des Widerstandes N, den dieser Punkt zu leisten hat, mit N_x, N_y, N_z, die Coordinaten des festen Punktes selbst mit x, y, z, und das Gewicht des Körpers mit Q, so werden unsere Bedingungsgleichungen nach den Erörterungen in §. 64 folgende:

$$\left.\begin{aligned} N_x = 0 \quad , \quad N_y = 0 \quad , \quad Q + \mathfrak{P}_z + N_z = 0 \quad , \\ Q\,\mathfrak{Y} + \mathfrak{P}_z\, y_3 + N_z\, y = 0 \quad , \quad Q\,\mathfrak{X} + \mathfrak{P}_z\, x_3 + N_z\, x = 0 \;. \end{aligned}\right\} \quad (A.$$

Eliminirt man dann mittels der dritten die Unbekannte N_z aus den beiden letzten, bei welchen die beiden ersten Bedingungen bereits berücksichtigt sind, so nehmen diese die Form an:

$$\left.\begin{aligned} N_z = -\,(Q + \mathfrak{P}_z) \quad , \\ Q(\mathfrak{Y} - y) + \mathfrak{P}_z(y_3 - y) = 0 \;, \quad Q(\mathfrak{X} - x) + \mathfrak{P}_z(x_3 - x) = 0 \;, \end{aligned}\right\} \quad (B.$$

und zeigen, was übrigens auch so einleuchtet, daß der Druck der Flüssigkeit und das Gewicht des Körpers sich in Bezug auf den festen Punkt das Gleichgewicht halten, und daß, weil $\mathfrak{P}_z$ und Q dem Sinne nach entgegengesetzt sind, die Projectionen $\mathfrak{X}-x$ und $\mathfrak{x}_3-x$, $\mathfrak{Y}-y$ und $\mathfrak{y}_3-y$ der Hebelarme gleiche Zeichen haben, daß also $\mathfrak{P}_z$ und Q auf derselben Seite des festen Punktes angreifen müssen. Aus den beiden letzten Gleichungen zieht man aber auch noch durch Elimination von $\mathfrak{P}_z$ die Bedingung:

$$\frac{\mathfrak{Y}-y}{\mathfrak{y}_3-y} = \frac{\mathfrak{X}-x}{\mathfrak{x}_3-x} \quad ,$$

welche ausspricht, daß die Projectionen der Angriffspunkte von Q, $\mathfrak{P}_z$ und N_z in der xy=Ebene in einer Geraden liegen müssen, oder nach den früheren Erörterungen mit andern Worten, daß der Schwerpunkt des Körpers, und der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit mit dem festen Punkt in einer und derselben verticalen Ebene liegen müssen, und zwar beide auf derselben Seite des letztern.

Wenn der Körper ganz eingetaucht sein soll, und wenn wieder V und p_1 sein Volumen und mittleres specifisches Gewicht und p' das specifische Gewicht der Flüssigkeit ist, so haben wir $\mathfrak{P}_z = -p'V$, $Q = p_1 V$, und demnach

$$N_z = -(p_1 - p')V \quad ,$$

und aus dem Zeichen dieses Werthes schließen wir, ob der Körper von unten oder von oben unterstützt werden muß; das erstere wird der Fall sein, wenn $p_1 < p'$, wenn das Gewicht des Körpers größer ist, als das der verdrängten Flüssigkeit, der letztere findet im umgekehrten Fall statt.

Fällt dann der Schwerpunkt des Körpers mit dem Mittelpunkt seines Volumens oder mit dem Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit zusammen, so wird $\mathfrak{x}_3 = \mathfrak{X}$, $\mathfrak{y}_3 = \mathfrak{Y}$ und die beiden letzten der Bedingungen (B) zeigen in der Form:

$$(p_1 - p')V(\mathfrak{X}-x) = 0 \quad , \quad (p_1 - p')V(\mathfrak{Y}-y) = 0 \quad ,$$

daß in diesem Falle auch $x = \mathfrak{X}$, $y = \mathfrak{Y}$ werden, also der feste Punkt mit den beiden vorher genannten Punkten in derselben Verticalen liegen muß.

Ein homogener schwerer Körper kann demnach, in einer homogenen Flüssigkeit ganz eingetaucht, nur dann

durch einen festen Punkt im Gleichgewicht gehalten werden, wenn sein Schwerpunkt mit dem festen Punkt in derselben Verticalen liegt, wie beim Gleichgewicht im leeren Raum, und man wird diesen Satz leicht auch auf den Fall ausdehnen, wo der Körper in zwei Punkten oder durch eine feste Gerade gestützt wird. Im jetzigen Falle wird aber die Stabilität des Gleichgewichtes nicht allein von der Lage des Schwerpunktes in Bezug auf den Stützpunkt an und für sich abhängen, sondern von dieser Lage in Verbindung mit dem Zeichen von N_z; ist nämlich N_z negativ, also $p_1 > p'$, so ist die Lage stabil, wenn der Schwerpunkt unter dem Stützpunkt liegt; für $p_1 < p'$ dagegen erfordert die Stabilität, daß der Schwerpunkt über dem Stützpunkt liege.

In jedem Gleichgewichtszustande ist übrigens der Druck $-N_z$, den der Körper auf seinen Stützpunkt ausübt, dem Unterschiede zwischen dem Gewicht des Körpers und der von ihm verdrängten Flüssigkeit gleich. Wird daher ein schwerer Körper mittels eines Fadens ohne Dicke, oder von so geringer Dicke, daß das Volumen desselben für eine kleine Länge gegen das Volumen des Körpers verschwindend klein ist, an dem einen Arm einer gleicharmigen Wage angehängt, diese durch ein Gewicht $W = Q$ ins Gleichgewicht gebracht, und dann der Körper in eine Flüssigkeit, für welche $p' < p_1$ ist, eingesenkt, so daß derselbe ganz untergetaucht ist, so wird er nur noch den Zug $N_z = Q - p'V$ auf die Wage ausüben, diese also nicht mehr im Gleichgewicht sein können, bis man an dem Arm, an welchem der Körper hängt, noch ein Gewicht $w = Q - N_z = p'V$ beifügt, welches dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit gleich ist. Man spricht diese Erfahrung, der unmittelbaren Wahrnehmung an der Wage gemäß, aber nicht ganz richtig *), gewöhnlich so aus:

> Ein Körper verliert in einer Flüssigkeit soviel an Gewicht, als das Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit beträgt,

und nennt das Gewicht w den Gewichtsverlust des Körpers in der betreffenden Flüssigkeit.

Für homogene Körper ist das Verhältniß der Gewichte W und w auch gleich dem Verhältniß der specifischen Gewichte p und p', denn man hat dann

*) Es wird Niemand sagen, ein Körper, welcher durch eine feste oder elastische horizontale Ebene getragen wird, habe sein Gewicht ganz oder theilweise verloren.

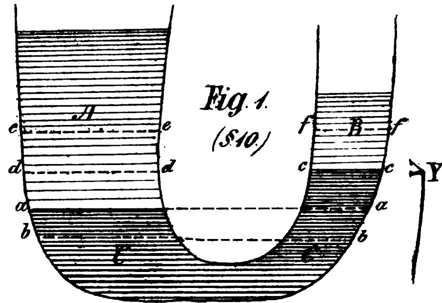
$$\frac{W}{w} = \frac{pV}{p'V} = \frac{p}{p'} \quad ,$$

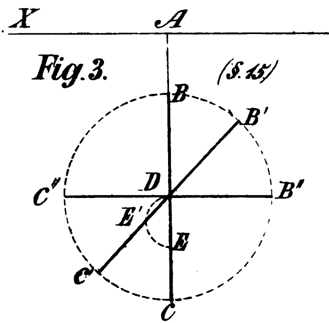
und die vorher angegebene doppelte Wägung eines Körpers außerhalb und in einer Flüssigkeit mittels einer sogenannten hydrostatischen Wage ist bekanntlich ein ziemlich sicheres Mittel zur Bestimmung des Verhältnisses $\beta = \frac{p}{p'}$ der specifischen Gewichte des Körpers und der betreffenden Flüssigkeit. Dasselbe Mittel kann auch angewendet werden, um das Verhältniß der specifischen Gewichte zweier Flüssigkeiten zu finden, indem man die Gewichtsverluste w_1 und w_2 desselben Körpers in den beiden Flüssigkeiten bestimmt; das Verhältniß dieser Gewichte w_1 und w_2 ist das der verdrängten Flüssigkeitsmengen $p'V$ und $p''V$, und daher auch das der specifischen Gewichte p' und p'' der beiden Flüssigkeiten, für welche aber vorausgesetzt wird, daß sowohl p' als p'' kleiner sei, als p.

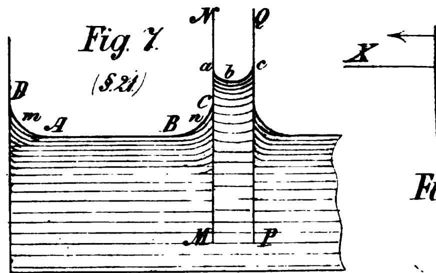
Für Körper, welche specifisch leichter sind, als die Flüssigkeit, in welche sie eingetaucht werden sollen, ist das gleiche Verfahren nicht anwendbar, da man einen solchen durch eine feste unbiegsame Gerade, also einen Draht, mit der Wage in Verbindung setzen und diese den Körper durch das aufgelegte Gewicht $w > W$ in die Flüssigkeit hineindrücken müßte, was schon wegen des nicht stabilen Gleichgewichtszustandes nicht ohne eine beträchtliche Dicke des Drahtes ins Werk gesetzt werden könnte. Man muß daher einen solchen Körper mit einem andern verbinden, dessen specifisches Gewicht so viel größer ist, als das der Flüssigkeit, daß beide zusammen noch in der Flüssigkeit untersinken; aus dem Gewichtsverlust beider Körper zusammen und dem des schweren allein ergibt sich dann auch der des specifisch leichteren Körpers.

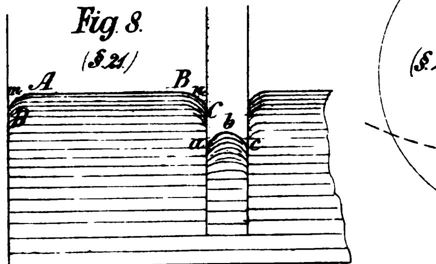
Druck von J. P. Himmer in Augsburg.

Taf. 1.









Decher, Handbuch der Mechan

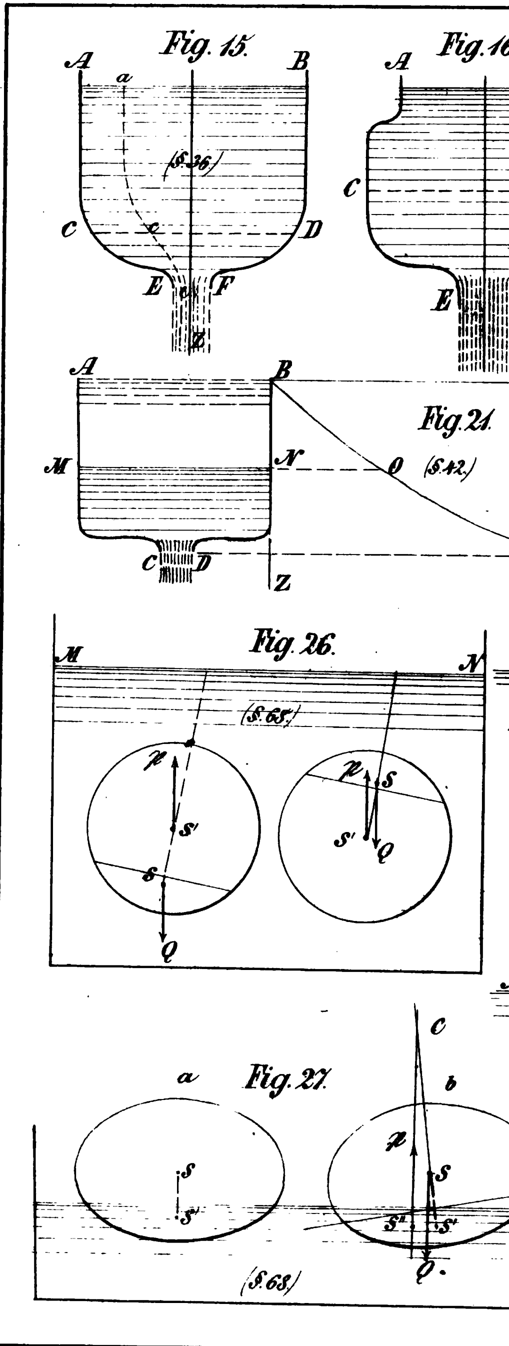


Fig. 15.
A
a
B
(§. 36)
C
c
D
E
F
Z
Fig. 16
A
C
E
A
B
Fig. 21.
M
N
O
(§. 42.)
C
D
Z
Fig. 26.
M
N
(§. 65.)
P
S'
S
Q
P
S
S'
Q
C
a
Fig. 27.
b
S
S'
P
S
S'
S'
Q
(§. 68.)

